

KURVEN 3^{ter} ORDNUNG MIT DOPPELPUNKT

Roland Stärk, 2015

Publiziert auf www.geometria.ch

1. Zentrische Spiegelung an einer Geraden. Gegeben sind eine Gerade f und ein Punkt Z (Figur 1). Ein Punkt P wird an f gespiegelt, aber nicht im gewöhnlichen Sinn! Die Gerade PZ wird mit f geschnitten, und an diesem Schnittpunkt wird P gespiegelt: P^* .

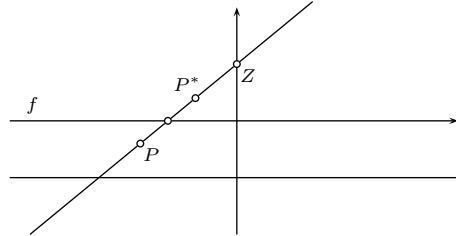


Fig. 1

Die Abbildung $: P \mapsto P^*$ heisst *Zentrische Spiegelung an der Geraden f mit dem Zentrum Z* .

Die Gerade f ist die *Achse* der Spiegelung, ihre Punkte sind fix. Die Parallele zu f im gleichen Abstand von f wie Z , auf der anderen Seite, ist die *Verschwindungsgerade*, ihr Bild ist der Punkt Z .

Die Abbildung ist involutorisch: Wenn P^* das Bild von P ist, dann ist P das Bild von P^* . Einzig Z hat kein eindeutiges Bild.

Bezogen auf das eingezeichnete Cartesische Koordinatensystem ergibt sich, mit $Z(0, 1)$, $f: y = 0$, die Formel

$$P(x, y) \mapsto P^* \left(\frac{x(1+y)}{1-y}, -y \right)$$

oder in homogener Schreibweise: $Z(0, 1, 1)$, $f(0, 1, 0)$, Verschwindungsgerade $(0, 1, 1)$ und

$$P(t_1, t_2, t_3) \mapsto P^*(t_1(t_2 + t_3), t_2(t_2 - t_3), t_3(t_3 - t_2)) .$$

Eine zentrische Spiegelung bildet Geraden in Hyperbeln ab, welche durch das Zentrum laufen und von denen die Verschwindungsgerade eine Asymptote ist, was man mit **CABRI** [1] sofort ausprobieren kann – und sollte.

Was passiert mit Kreisen und Kegelschnitten? Zuerst einmal steht fest, dass ihre Schnittpunkte mit der Verschwindungsgeraden in das Zentrum abgebildet werden, dass Z ein Doppelpunkt des Bildes wird. Wenn nun mit dem Ansatz $P^*(x_1, x_2, x_3)$ die Koordinaten des Ausgangspunkts

$$P(x_1(x_2 + x_3), x_2(x_2 - x_3), x_3(x_3 - x_2))$$

in die Gleichung eines Kegelschnitts $\mathcal{K}$

$$k_1 t_1^2 + k_2 t_2^2 + k_3 t_3^2 + k_4 t_1 t_2 + k_5 t_2 t_3 + k_6 t_3 t_1 = 0$$

(geschrieben mit laufenden Koordinaten t_1, t_2, t_3)

eingesetzt werden, entsteht für das Bild $\mathcal{K}^*$ eine Gleichung 4^{ten} Grades (in den Koordinaten x_1, x_2, x_3). Kegelschnitte werden in Kurven 4^{ter} Ordnung abgebildet.

Falls $\mathcal{K}$ durch Z geht, gilt $k_2 + k_3 + k_5 = 0$. Dies vereinfacht die Gleichung. Sie zerlegt sich in den Faktor $(x_2 + x_3)$, der für die Verschwindungsgerade steht (Z geht über in die Verschwindungsgerade), und einen Faktor dritten Grades, der eine Kurve 3^{ter} Ordnung repräsentiert. Dieser Faktor, die Gleichung von $\mathcal{K}^*$, zeigt noch, dass die Verschwindungsgerade nebst dem Fernpunkt nur noch einen Punkt mit $\mathcal{K}^*$ gemeinsam hat, also Asymptote ist.

Fernpunkte, insbesondere die Kreisfernpunkte $K_1(1, i, 0)$, $K_2(1, -i, 0)$ gehen bei einer zentrischen Spiegelung in sich über, zirkuläre Kurven (das sind Kurven, die durch K_1, K_2 laufen) in zirkuläre Kurven.

Satz 1: Bei einer zentrischen Spiegelung an einer Geraden werden Kegelschnitte, die durch das Zentrum gehen, in Kurven 3^{ter} Ordnung abgebildet, bei denen das Zentrum Doppelpunkt ist und die Verschwindungsgerade eine der (drei) Asymptoten. Insbesondere gehen Kreise, die durch das Zentrum verlaufen, in Zirkulärkurven über.

Umgekehrt soll auch gezeigt werden, dass eine Kurve 3^{ter} Ordnung $\mathcal{C}$:

$$k_1 t_1^3 + k_2 t_2^3 + k_3 t_3^3 + k_4 t_1^2 t_2 + k_5 t_2^2 t_3 + k_6 t_3^2 t_1 + k_7 t_1 t_2^2 + k_8 t_2 t_3^2 + k_9 t_3 t_1^2 + k_{10} t_1 t_2 t_3 = 0,$$

welche die Verschwindungsgerade $(0,1,1)$ als eine Asymptote besitzt und das Zentrum $Z(0,1,1)$ als Doppelpunkt, in einen Kegelschnitt übergeht.

Durch den Fernpunkt $(1,0,0)$ der Verschwindungsgeraden gehen, bedeutet $k_1 = 0$, durch Z gehen: $k_2 = -k_3 - k_5 - k_8$, usw.

Die Berechnungen werden schnell mühsam und von Hand kaum durchführbar. Doch mit Hilfe eines Computer-Algebrasystems – wir verwenden **Mathematica** [2] – lassen sich komplizierte Ausdrücke verarbeiten. Voraussetzung ist, dass man sich für die einfachen, jeweils immer wiederkehrenden Teilschritte (Schneiden von Geraden, Winkelberechnung, Pol/Polare bei Kegelschnitten, Inzidenzprüfung etc.) einen guten Prozedurvorrat angelegt hat. Ein Detail: die Tangente in einem Punkt einer Kurve 3^{ter} Ordnung berechnet man mit Hilfe seines Polarkegelschnitts: Polarkegelschnitt von $f(t_1, t_2, t_3) = 0$ für den Punkt $P(p_1, p_2, p_3)$:

$$\underbrace{p_1 \frac{df}{dt_1} + p_2 \frac{df}{dt_2} + p_3 \frac{df}{dt_3}}_{g(t_1, t_2, t_3)} = 0$$

Polare von P bez. g :

$$p_1 \frac{dg}{dt_1} + p_2 \frac{dg}{dt_2} + p_3 \frac{dg}{dt_3} = 0.$$

Der Polarkegelschnitt eines Doppelpunkts ist ausgeartet, ist sein Tangentenpaar. Nimmt man an, die Geraden $(2, v, -v)$ und $(2, w, -w)$, welche Z mit den Punkten $V(v, -1, 1)$, $W(w, -1, 1)$ verbinden, seien die Tangenten, dann muss der Polarkegelschnitt von Z die Gleichung $(2t_1 + vt_2 - vt_3)(2t_1 + wt_2 - wt_3) = 0$ haben. Darauf sind die Koeffizienten k_i abzustimmen.

Schliesslich wird das erwartete Resultat mit der so präparierten Gleichung von $\mathcal{C}$ wie vorn erreicht.

Satz 2: Eine Kurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt geht bei den (drei) zentrischen Spiegelungen, mit dem Doppelpunkt als Zentrum und den Mittelparallelen zwischen dem Doppelpunkt und den Asymptoten als Achsen (d.h. mit den Asymptoten als Verschwindungsgeraden), in Kegelschnitte über, die durch den Doppelpunkt laufen.

Insbesondere geht eine Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt bei der zentrischen Spiegelung, mit dem Doppelpunkt als Zentrum und der (reellen) Asymptote als Verschwindungsgeraden in einen Kreis durch den Doppelpunkt über.

2. Für weitere Untersuchungen wird der Kegelschnitt $\mathcal{K}$, der durch $Z(0,1,1)$ geht und an der Achse $f(0,1,0)$ mit Z als Zentrum gespiegelt werden soll, nicht wie oben in allgemeiner Form $k_1 t_1^2 + \dots = 0$ angesetzt, sondern, um die Rechnung zu vereinfachen, schon ausgerichtet auf einige besondere Punkte (Figur 2).

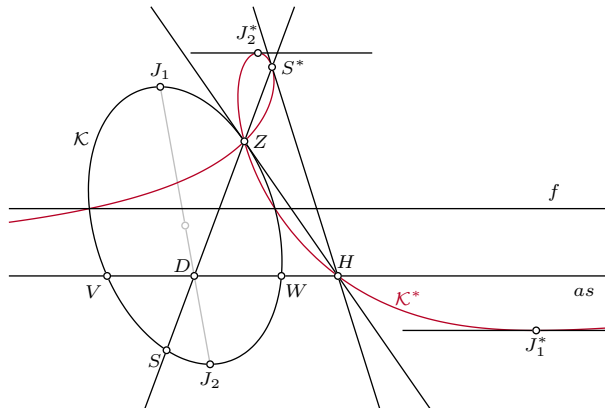


Fig. 2

Es seien V, W seine Schnittpunkte mit der Verschwindungsgeraden $(0, 1, 1)$ und J_1, J_2 die Punkte, deren Tangenten parallel zur Achse f verlaufen. Mit dem Ansatz $V(v, -1, 1), W(w, -1, 1), J_1(p, q, 1)$ ergibt sich für $\mathcal{K}$ die Gleichung:

$$-2t_1^2 + 2q^2t_1^2 + 4pt_1t_2 - 4pqt_1t_2 + \dots = 0$$

(aus Platzgründen hier nicht voll ausgeschrieben),

und dann kann die Gleichung des Bildes $\mathcal{K}^*$ wie vorn im Abschnitt 1 berechnet werden.

Die Rechnung führt zu den folgenden Resultaten:

(2.1) $\mathcal{K}^*$ hat die Doppelpunkttangenten ZV, ZW .

(2.2) Die Punkte J_1^*, J_2^* sind die Randpunkte von $\mathcal{K}^*$, die Punkte, deren Tangenten parallel zur Asymptote verlaufen (man denke sich die Kurve in ein Band gelegt).

Wichtig ist noch die Feststellung, dass es bei den Rechnungen unerheblich ist, ob die Punkte V, W reell sind, ob der Kegelschnitt die Verschwindungsgerade sichtbar schneidet und die Doppelpunkttangenten zu sehen sind, oder nicht.

(2.3) Die Punkte D, S und H sind wichtig.

D , die Mitte von VW kann auch konstruiert werden, wenn $\mathcal{K}$ die Verschwindungsgerade nicht schneidet, als deren Schnittpunkt mit ihrem konjugierten $\mathcal{K}$ -Durchmesser.

S ist der zweite Punkt von ZD auf $\mathcal{K}$.

H ist der Schnittpunkt der Tangente an $\mathcal{K}$ in Z mit der Verschwindungsgeraden. Es zeigt sich, dass S^* und auch H besondere Punkte von $\mathcal{K}^*$ sind: H , der dritte Punkt von $\mathcal{K}^*$ auf der Asymptote, ist im zirkularen Fall der Hauptpunkt (siehe Abschnitt 3,(4.3)) und S^* ist der Punkt von $\mathcal{K}^*$, dessen Tangente durch H geht, der Steinerpunkt.

S^* liegt auf der Geraden $J_1^*J_2^*$.

Ein laufender Punkt P von $\mathcal{K}$ kann für weitere Rechnungen mit Hilfe des von Z ausgehenden Strahls in Parameterform erfasst werden, und dann auch P^* auf $\mathcal{K}^*$.

Nach einigem CABRI-Experimentieren stösst man auf einen bemerkenswerten Zusammenhang. Die Grundidee ist ja, Eigenschaften von $\mathcal{K}^*$ mit Hilfe von $\mathcal{K}$ zu erforschen und zu erklären.

Eine wichtige Frage bei Kurven 3^{ter} Ordnung: Wie wird der dritte Schnittpunkt einer Geraden konstruiert, wenn zwei schon bekannt sind? Durch einen Punkt P^* von $\mathcal{K}^*$ ist eine Gerade gelegt, die um P^* herum gedreht wird (Figur 3). Sie schneidet $\mathcal{K}^*$ noch in zwei Punkten X_1^*, X_2^* . Wie bewegen sich die ihnen entsprechenden Punkte X_1, X_2 auf $\mathcal{K}$ bei der Drehung?

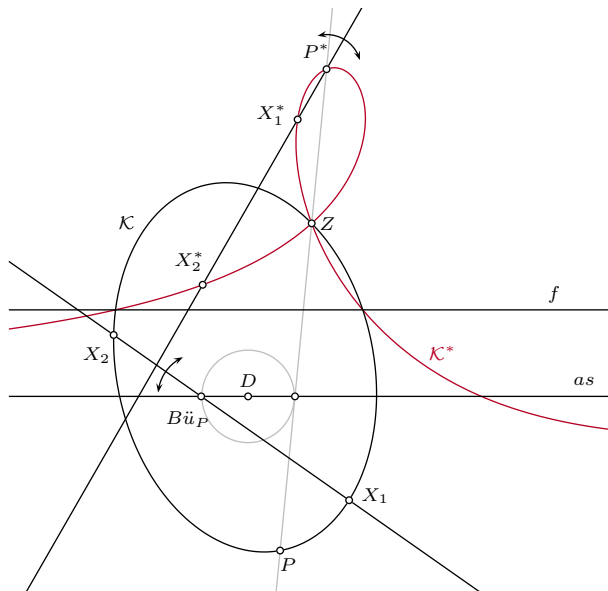


Fig. 3

Es zeigt sich, dass sich auch die Gerade X_1X_2 um einen festen Punkt dreht, der auf der Verschwindungsgeraden liegt. Dieser Büschelpunkt $Bü_P$ von P, P^* und der Schnittpunkt der Geraden ZP mit der Verschwindungsgeraden liegen symmetrisch bez. D (dem Schnittpunkt der Verschwindungsgeraden mit ihrem konjugiertem $\mathcal{K}$ -Durchmesser).

Satz 3: Die Figur 3 beantwortet die Frage nach dem dritten Schnittpunkt einer Geraden mit der Kurve 3^{ter} Ordnung $\mathcal{K}^*$ mit Doppelpunkt, in welche bei der zentrischen Spiegelung an f , mit Zentrum Z , ein durch Z gehender Kegelschnitt $\mathcal{K}$ abgebildet wird:

Der dritte Punkt zu X_1^*, X_2^* ist P^* .

Und auch die Tangentenkonstruktion in P^* an $\mathcal{K}^*$ ist erklärt:

Wenn X_2 mit P zusammenfällt, ist X_1^* der Tangentenpunkt von P^* .

3. Wir wenden uns nun den Zirkularkurven 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt zu.

Unter den Kurven 3^{ter} Ordnung haben die zirkularen, die Kurven, welche durch die Kreisfernpunkte gehen, besondere Bedeutung – vergleichbar den Kreisen unter den Kegelschnitten, da sie, metrisch zugänglicher, bei vielen Konfigurationen mitwirken.

Die Gleichung (in homogenen Cartesischen Koordinaten)

$$k_1t_1^3 + k_2t_2^3 + k_3t_3^3 + k_4t_1^2t_2 + k_5t_2^2t_3 + k_6t_3^2t_1 + k_7t_1t_2^2 + k_8t_2t_3^2 + k_9t_3t_1^2 + k_{10}t_1t_2t_3 = 0,$$

einer Kurve 3^{ter} Ordnung $\mathcal{Z}$ stellt eine Zirkularkurve dar, wenn $k_7 = k_1$ und $k_4 = k_2$ ist. Der dritte Fernpunkt $F(k_2, -k_1, 0)$ und seine Asymptote

$$as(k_1(k_1^2 + k_2^2), k_2(k_1^2 + k_2^2), k_1^2k_5 + k_2^2k_9 - k_1k_2k_{10})$$

sind dann reell (Wir befassen uns mit Kurven, deren Koeffizienten k_i reell sind). Und auch der Schnittpunkt

$$Q(k_2k_{10} - k_1k_5 + k_1k_9, k_1k_{10} + k_2k_5 - k_2k_9, -2k_1^2 - 2k_2^2)$$

der (nichtreellen) Tangenten in den Kreisfernpunkten ist reell. Er heisst *Singulärer Brennpunkt* von $\mathcal{Z}$ und ist einer der wichtigen Punkte. Der Singuläre Brennpunkt kann selber auf der Kurve liegen. Dann spricht man von einer *Fokalkurve*.

Nun ist in der Figur 4 die zentrische Spiegelung (Zentrum Z , Achse f) eines Kreises $\mathcal{K}$ dargestellt, und die markanten Elemente der Zirkularkurve $\mathcal{K}^*$ sind eingezeichnet.

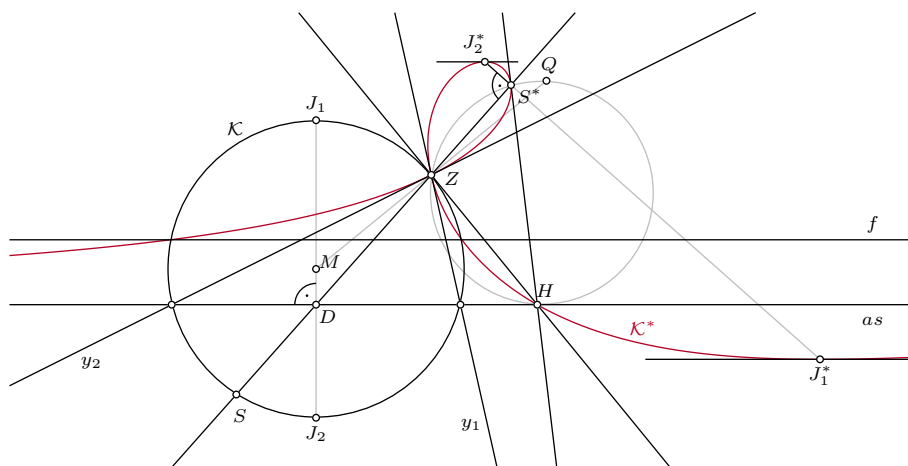


Fig. 4

Kurze Zusammenfassung:

(3.1) Doppelpunkt Z .

Doppelpunkt tangente y_1, y_2 .

Asymptote as (Verschwindungsgerade der Spiegelung).

J_1^*, J_2^* Randpunkte von $\mathcal{K}^*$.

(3.2) Der Steinerpunkt S^* ist hier der Fusspunkt des Lots von Z auf die Gerade $J_1^*J_2^*$. Die Punkte D, Z, S^* sind kollinear, ihre Gerade ist Seitenhalbierende des durch y_1, y_2, as gebildeten Dreiecks.

- (3.3) Q , der Singuläre Brennpunkt, liegt symmetrisch bez. Z zum Umkreismittelpunkt M des Dreiecks $y_1 y_2 as$.
- (3.4) Der Hauptpunkt H , der dritte Punkt von $\mathcal{K}^*$ auf as , gehört zur Tangente in Z an $\mathcal{K}$. Der Thaleskreis über HQ , bekanntlich der Kreis, auf welchem bei einer Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung die drei Steinerpunkte liegen, enthält hier nebst S^* einfach noch den Doppelpunkt.

Und damit ist auch vorgezeigt, wie eine Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt fertiggezeichnet werden kann, wenn von ihr einige besondere Punkte vorgegeben sind, z.B. Z, as, Q oder Z, as, S^*, H .

Die Figur 5 zeigt unterschiedliche Positionen des Kreises $\mathcal{K}$.

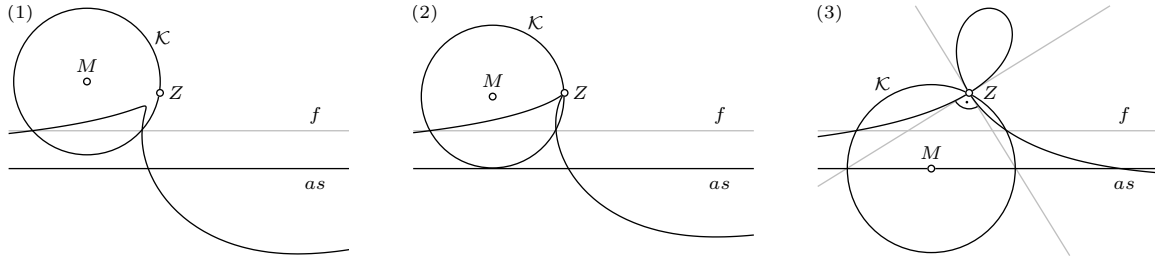


Fig. 5

- (3.5) Wenn $\mathcal{K}$ die Asymptote as nicht reell schneidet (1), hat $\mathcal{K}^*$ keine Schleife. Der Doppelpunkt ist isoliert, und die (nichtreellen) Doppelpunkttangenten sind unsichtbar.
- (3.6) Wenn $\mathcal{K}$ die Asymptote as berührt (2) hat $\mathcal{K}^*$ eine Spitze, die Doppelpunkttangenten fallen zusammen. Solche Kurven heissen *Zissoiden*.
- (3.7) Von besonderer Bedeutung ist der Fall (3). Wenn der Mittelpunkt von $\mathcal{K}$ auf as liegt, sind die Doppelpunkttangenten y_1, y_2 orthogonal, und der Singuläre Brennpunkt Q liegt auf $\mathcal{K}^*$ zusammenfallend mit dem Steinerpunkt S^* . $\mathcal{K}^*$ ist hier eine *Fokalkurve*.

Zirkularkurven 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt, welche fokal sind oder, was gleichbedeutend ist, welche orthogonale Doppelpunkttangenten besitzen, heissen *Strophoiden*.

Strophoiden zeichnet noch eine bemerkenswerte Winkeleigenschaft aus. Bei einer Strophoide $\mathcal{K}^*$ mit dem Doppelpunkt Z (Figur 6) seien A^*, B^* irgend zwei Punkte, deren Doppelpunktstrahlen ZA^*, ZB^* symmetrisch sind bez. der Doppelpunkttangenten y_1, y_2 .

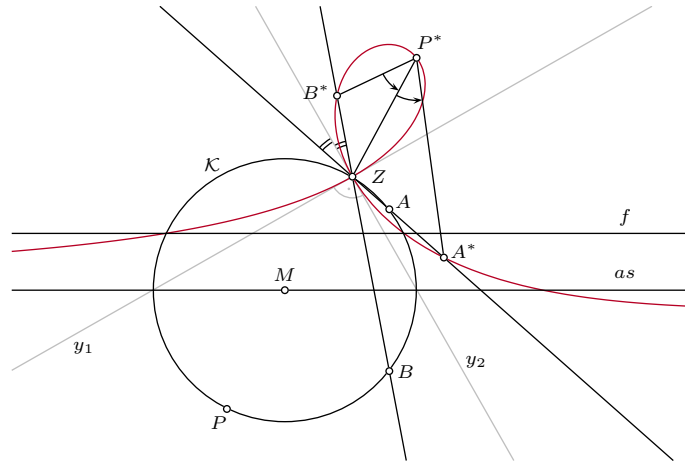


Fig. 6

Dann gilt für jeden Punkt P^* der Strophoide

$$\angle B^* P^* Z = \angle Z P^* A^* .$$

Und dazu kommt noch: Wenn man P^* isogonal im Dreieck $A^* B^* Z$ abbildet, landet man überrascht wieder bei einem Kreis. Es ist der durch Z laufende Apolloniuskreis des Dreiecks $A^* B^* Z$. Sein Mittelpunkt liegt auf der Verbindungsgeraden $J_1^* J_2^*$ der Randpunkte von $\mathcal{K}^*$. Übrigens, der Lemoinepunkt des Dreiecks $A^* B^* Z$ liegt auf der Geraden von Z zum Singulären Brennpunkt $Q = S^*$ von $\mathcal{K}^*$.

Noch eine wichtige Ergänzung (Figur 7) zu Figur 3:

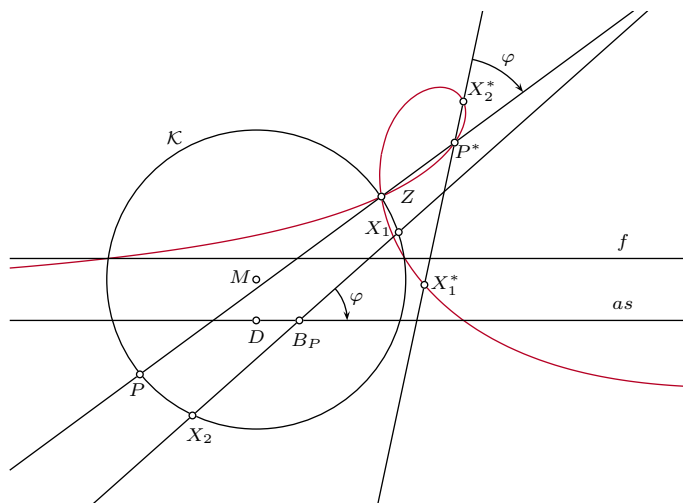


Fig. 7

Für Kreise, also bei Zirkularkurven gilt sogar

$$\angle(X_1X_2, as) = \angle(X_1^*X_2^*, ZP^*).$$

So wird es möglich, bei Zirkularkurven 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt mit Hilfe von CABRI interessante Konstruktionen durchzuführen.

Ein Beispiel: Durch einen Punkt P^* auf $\mathcal{K}^*$ sind zwei orthogonale Geraden r, s gelegt. Es seien $R_1^*, R_2^*, S_1^*, S_2^*$ deren weitere Schnittpunkte mit $\mathcal{K}^*$. Das Rechtwinkelpaar rs wird um P^* herumgedreht. Man untersuche, wie sich der Tangentialpunkt [3] des Vierecks $R_1^*R_2^*S_1^*S_2^*$ bewegt.

Die Winkleigenschaft erlaubt, die Orthogonalität einfach bei den entsprechenden Punkten auf $\mathcal{K}$ einzurichten und die Drehung dort vorzunehmen.

Noch eine Übung. Zwei Punkte einer Kurve 3^{ter} Ordnung heissen *korrespondierend*, wenn sie denselben Tangentialpunkt (denselben dritten Schnittpunkt ihrer Tangenten mit der Kurve) haben. Man untersuche mit CABRI bei einer Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt die Verbindungsgeraden korrespondierender Punkte (soweit solche zu sehen sind).

4. Abschliessend seien noch einige andere Zugangsmöglichkeiten zu Zirkularkurven 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt vorgestellt.

(1) Die Isogonalabbildung bei einem Dreieck bildet bekanntlich Kreise, die durch zwei der Ecken gehen, wieder in Kreise ab. Was geschieht mit Kreisen, die nur durch eine der Ecken laufen?

Antwort: Sie werden in Zirkularkurven 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt abgebildet.

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis, mit Mittelpunkt M , durch die Ecke C eines Dreiecks ABC . Das isogonale Bild $\mathcal{K}^*$ läuft durch A, B, C , wobei C der Doppelpunkt ist. Die Geraden von C aus zu den Schnittpunkten von $\mathcal{K}$ mit der Seite AB sind isogonalkonjugiert bez. ABC zu den Doppelpunkt tangente. Die Punkte J_1, J_2 von $\mathcal{K}$, die auf der Normalen n zu AB durch M liegen, gehen über in die Randpunkte von $\mathcal{K}^*$, in die Punkte, deren Tangenten parallel verlaufen zur Asymptote. Der Steinerpunkt S^* ist der Fusspunkt des Lots von C auf $J_1^*J_2^*$. Der zweite Schnittpunkt F von $\mathcal{K}$ mit dem Umkreis des Dreiecks liefert den Fernpunkt der Asymptote. Was wird aus dem zu F bez. n symmetrischen Punkt?

(2) Gegeben sind ein Kreis k und eine Gerade f durch seinen Mittelpunkt (Figur 8).

Ein Punkt P wird an f gespiegelt und anschliessend an k invertiert, oder umgekehrt, und dann wird die Strecke von P zum spiegelinversen Punkt P' halbiert: P^* . Die interessante Abbildung $: P \mapsto P^*$ führt Geraden in Zirkularkurven 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt über. Sie wird in [4] ausführlich untersucht.

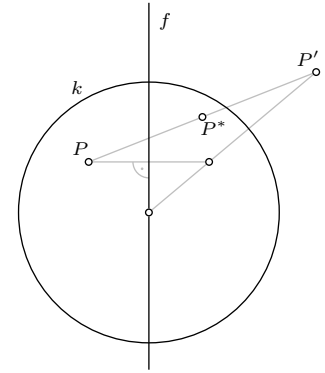


Fig. 8

(3) Ein Kegelschnitt $\mathcal{K}$ – in der Figur 9 ist es eine Hyperbel – wird an einem Kreis k um einen seiner Punkte, um M , invertiert. $\mathcal{K}$ geht dabei in eine Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit dem Doppelpunkt M über.

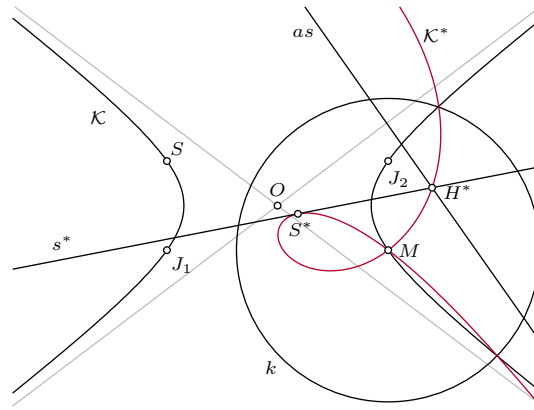


Fig. 9

- (4.1) Die Doppelpunkt tangenten von $\mathcal{K}^*$ sind parallel zu den Asymptoten von $\mathcal{K}$ (mit einer Parabel gibt es eine Spitze).
- (4.2) Der zu M diametrale Punkt S von $\mathcal{K}$ geht über in den Steinerpunkt von $\mathcal{K}^*$. Dieser ist die Mitte von O^*M (O das Zentrum von $\mathcal{K}$).
- (4.3) Die zu M symmetrischen Punkte J_1, J_2 bez. der Achsen von $\mathcal{K}$ gehen über in die Punkte von $\mathcal{K}^*$, deren Tangenten parallel verlaufen zur Asymptote.
- (4.4) Der Kreis durch M und S , der $\mathcal{K}$ in S berührt, schneidet $\mathcal{K}$ noch in einem vierten Punkt. Dieser geht in den Hauptpunkt von $\mathcal{K}^*$ über.
- (4.5) Der Krümmungskreis in einem Punkt P von $\mathcal{K}$ geht über in den Krümmungskreis in P^* von $\mathcal{K}^*$. Der Krümmungskreis von $\mathcal{K}$ in M liefert die Asymptote von $\mathcal{K}^*$, sie ist parallel zur Tangente in M an $\mathcal{K}$.

Und noch eine kleine Folgerung. Wenn $\mathcal{K}^*$ von einem Kreis k^* in zwei Punkten P_1^* und P_2^* berührt wird, dann geht die Gerade $P_1^*P_2^*$ durch einen der Punkte J^* .

Denn k – auch ein Kreis – hat dann seinen Mittelpunkt auf einer der Achsen von $\mathcal{K}$, und die Punkte P_1, P_2 sind symmetrisch bez. dieser Achse. Dem Kreis durch P_1, P_2 und M , der in die Gerade $P_1^*P_2^*$ übergeht, bleibt nichts anderes übrig, als durch einen der Punkte J zu laufen.

(4) Wie eine Parabel leicht in eine Zirkularkurve abgebildet werden kann, zeigt die Figur 10. Gegeben sind eine Parabel $\mathcal{P}$ (Brennpunkt F , Leitgerade ℓ) und ein Punkt Y . Einem Punkt P auf $\mathcal{P}$ wird der Punkt P^* zugeordnet, der symmetrisch ist zu Y bez. der Tangente in P an $\mathcal{P}$. So geht $\mathcal{P}$ über in eine Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt Y .

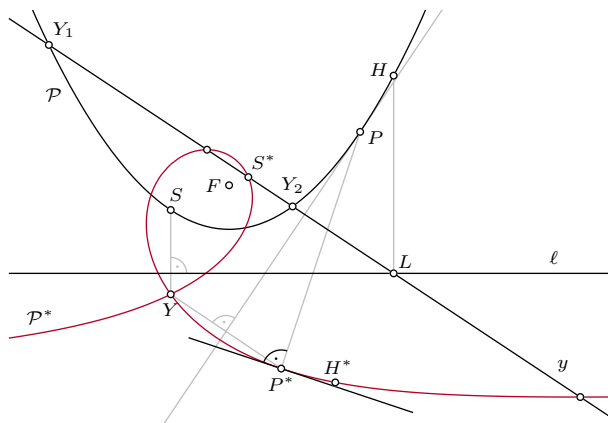


Fig. 10

Es sei y die Polare von Y bez. $\mathcal{P}$, und Y_1, Y_2 deren Schnittpunkte mit $\mathcal{P}$, sowie L der Schnittpunkt mit ℓ .

- (4.6) Y wird Doppelpunkt von $\mathcal{P}^*$. Die Doppelpunkt tangente sind orthogonal zu den $\mathcal{P}$ -Tangente in Y_1, Y_2 . Allgemein gilt: Die Tangente in P^* an $\mathcal{P}^*$ steht senkrecht auf PP^* .
- (4.7) Die Asymptote von $\mathcal{P}^*$ verläuft parallel zur Leitgeraden.
- (4.8) F ist der Singuläre Brennpunkt.
- (4.9) Der Punkt S von $\mathcal{P}$ auf der Senkrechten durch Y zu ℓ , geht über in den Steinerpunkt, der Punkt H senkrecht über L geht über in den Hauptpunkt.
- (4.10) Die Berührungspunkte der Tangente von L an $\mathcal{P}$ liefern die Randpunkte von $\mathcal{P}^*$. Diese und der Steinerpunkt liegen auf y und können auch mit dem Kreis um L , der durch Y geht, konstruiert werden.

Die Geraden durch die Punktepaare auf $\mathcal{P}$, deren Bilder kollinear sind mit dem Bild P^* eines Punktes P , haben auch hier bemerkenswert einen gemeinsamen Punkt – man vergleiche mit der Figur 3. Dieser Büschelpunkt auf y und der Schnittpunkt von y mit der Achsenparallelen durch P sind invers bez. des gerade erwähnten Kreises.

Es hat sich hier gezeigt, was vielleicht bisher noch nicht bemerkt wurde, dass bei einer Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt die Mittelsenkrechten der Strecken vom Doppelpunkt zu den Kurvenpunkten eine Parabel einhüllen, mit dem Singulären Brennpunkt als Brennpunkt.

Man sollte dies bei den Überlegungen vorn noch überall in Betracht ziehen.

Literatur

- [1] Laborde J.- M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
- [2] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer.
- [3] Stärk Roland/Baumgartner Daniel: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. Praxis der Mathematik, PM44 (2002) 19-27. Aulis Verlag, Köln.
- [4] Stärk Roland: Die Ansetzabbildung. www.geometria.ch

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH-8234 Stetten
roland.staerk@sunrise.ch