

GEGENWINKELSUMMEN BEIM VIERECK

Roland Stärk, 2014

Publiziert auf www.geometria.ch

1. Gegeben ist ein Viereck $ABCD$ (Figur 0).

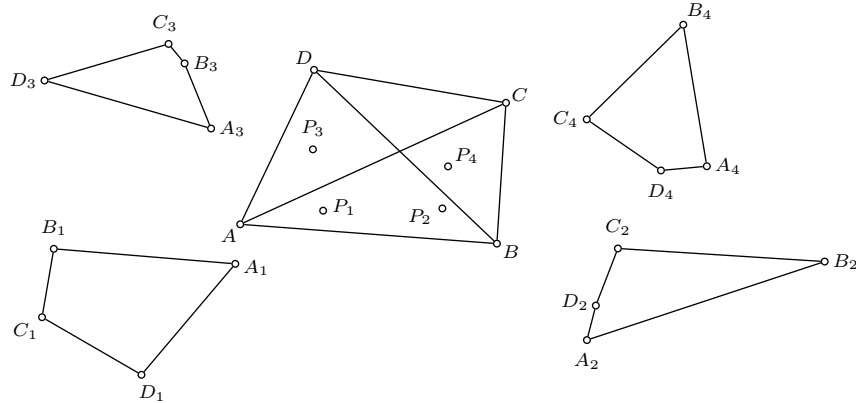


Fig. 0

Ein Punkt P_1 wird invertiert an den Umkreisen der vier Teildreiecke des Vierecks: Es sei A_1 der zu P_1 inverse Punkt bez. des Umkreises des Dreiecks BCD , B_1 sei invers bez. CDA , C_1 invers bez. DAB und D_1 invers bez. ABC (Die Kreise sind der Übersichtlichkeit wegen in der Figur nicht eingezeichnet). Betrachtet wird dann das Viereck mit den Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 . Mit einem zweiten Punkt P_2 wiederhole man die Konstruktion. Er liefert das Viereck $A_2B_2C_2D_2$, und so weiter mit beliebig gewählten Punkten $P_3, P_4, \dots$. Es entstehen ganz verschieden geformte Vierecke. Ist zwischen ihnen ein Zusammenhang zu sehen? Auf den ersten Blick nicht. Ohne den Titel dieser Publikation gelesen zu haben, kommt man vielleicht nicht so schnell auf die Idee, bei jedem Viereck die Summe der Winkel ABC und CDA zu bilden. Sie ist überall gleich.

2. Wenn hier von Winkeln bei Vierecken die Rede ist, sind stets *allgemeine* Vierecke gemeint, und die Winkel werden immer orientiert, modulo 180° erfasst.

Beim Viereck $ABCD$ der Figur 1 zum Beispiel, welches zusammengesetzt ist aus einem schräghalben Quadrat und einem gleichseitigen Dreieck, beträgt der Winkel $\angle ABC$, man kann sagen: $-150^\circ, +30^\circ$. Angegeben wird einfach ein Drehwinkel, mit welchem die Gerade AB in die Gerade BC übergeführt werden kann.

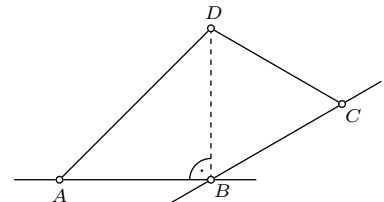


Fig. 1

Von den vielen möglichen Winkelsummen

$$\angle XYZ + \angle UVW \quad (\{X, Y, Z\}, \{U, V, W\} \subset \{A, B, C, D\}),$$

die sich bei einem Viereck $ABCD$ bilden lassen, haben viele einen gleichen oder entgegengesetzten Wert, und nur wenige sind von Bedeutung. Hier interessieren nur die *Gegenwinkelsummen*

$$\angle XYZ + \angle ZWX,$$

welche entlang der drei geschlossenen Vierstreckenzüge

$$AB, BC, CD, DA \quad \text{resp.} \quad AC, CD, DB, BA \quad \text{resp.} \quad AD, DB, BC, CA$$

rundherum in beiden Richtungen gebildet werden können. Abkürzend schreiben wir $\angle(XYZW)$ für die Summe $\angle XYZ + \angle ZWX$.

Beim Viereck oben beträgt

$$\begin{aligned}\angle(ABCD) &= (-150^\circ) + (-105^\circ) = -255^\circ \sim -75^\circ \\ \angle(DBAC) &= 90^\circ + (-45^\circ) = 45^\circ.\end{aligned}$$

Leicht einzusehen sind die Formeln

$$\begin{aligned}\text{(I)} \quad \angle(XYZW) &= \begin{cases} \angle(ZWXY) \\ -\angle(XWZY) \\ \angle(YXWZ) \end{cases} \\ \text{(II)} \quad \angle(XYZW) + \angle(XZWY) + \angle(XWYZ) &= 0.\end{aligned}$$

Zwei Vierecke heissen *gegenwinkelsummengleich*, wenn es eine Zuordnung ihrer Ecken $A_1 \leftrightarrow A_2, B_1 \leftrightarrow B_2, \dots$ gibt, so dass alle entsprechenden Gegenwinkelsummen übereinstimmen.

$$\angle(X_1Y_1Z_1W_1) = \angle(X_2Y_2Z_2W_2).$$

Und zusätzlich unterscheidet man noch zwischen dieser gleichsinnigen Übereinstimmung und der gegen-sinnigen

$$\angle(X_1Y_1Z_1W_1) = -\angle(X_2Y_2Z_2W_2).$$

Um die Gegenwinkelsummengleichheit zweier Vierecke $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ festzustellen, ist es aber, wegen der Formeln (I), nicht nötig, alle 24 Summen zu überprüfen, da jeweils nur drei Werte, mit beiden Vorzeichen, angenommen werden. Bei der Figur 1 sind es die Werte $(\pm) 30^\circ, 45^\circ, 75^\circ$. Ist eine erste Übereinstimmung $\angle(X_1Y_1Z_1W_1) = \angle(X_2Y_2Z_2W_2)$ gefunden, so genügt es sogar, wegen (II), nur noch $\angle(XZWY)$ zu prüfen.

Vierecke mit Umkreis haben lauter verschwindende Gegenwinkelsummen und nehmen darum oft eine Sonderstellung ein.

Diese Gegenwinkelklassifizierung der Vierecke wirkt auf den ersten Blick ausgefallen und künstlich – kein Vergleich mit Kongruenz und Ähnlichkeit – aber überraschend oft ist sie, wie man sehen wird, doch von Bedeutung.

3. Ein Beispiel: Bei einem Viereck $ABCD$ sei U_A der Umkreismittelpunkt des Teildreiecks BCD , und entsprechend seien U_B, U_C, U_D die Umkreismittelpunkte von CDA, DAB, ABC . Das durch U_A, U_B, U_C, U_D gebildete Viereck, das sogenannte *Mittelsenkrechtenviereck* des Vierecks $ABCD$ – seine Seiten sind dessen Mittelsenkrechten – hat zwar ganz andere Form als $ABCD$, die *Gegenwinkelsummen stimmen aber alle überein*

$$\angle(U_XU_YU_ZU_W) = \angle(XYZW).$$

Dies sieht man so (Figur 2). U_AU_B ist orthogonal zu CD , U_BU_C ist orthogonal zu DA . Somit ist $\angle U_AU_BU_C = \angle CBA$ und ebenso $\angle U_CU_DU_A = \angle ABC$. Daraus folgt

$$\angle(U_AU_BU_CU_D) = \angle CDA + \angle ABC = \angle(ABCD).$$

Und ebenso $\angle(U_AU_CU_DU_B) = \angle(ACDB)$.

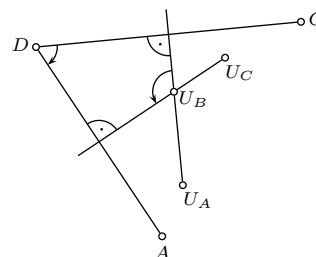


Fig. 2

So einfach wie hier ist Gegenwinkelsummengleichheit natürlich selten nachzuweisen. Meistens ist es nötig, zumindest zuerst, analytisch vorzugehen, so reizvoll ein synthetischer Weg immer auch sein mag. Man kann dazu *Mathematica* verwenden [1], erfolgreich aber erst, wenn man schon ein reiches Repertoire an Teilschritten vorprogrammiert hat. Und selbstverständlich begleitet man immer alles mit einer *Cabri*-Zeichnung [2].

Bei den Vierecken $U_AU_BU_CU_D$ und $ABCD$ besteht noch ein weiterer merkwürdiger Zusammenhang. Die vier Inhaltsverhältnisse entsprechender Teildreiecke $J_{U_XU_YU_Z} : J_{XYZ}$ sind alle gleich. Die sogenannte σ -Zahl eines Vierecks [5] ist wenig erforscht.

Als Koordinatensystem für Berechnungen bei einem Viereck $ABCD$ empfiehlt es sich, die Asymptoten der dem Viereck umschriebenen Gleichseithyperbel zu nehmen. Die Ecken können dann (in homogenen kartesischen Koordinaten) mit $A(a|\frac{1}{a}|1), B(b|\frac{1}{b}|1), \dots$ erfasst werden.

Um die speziellen Vierecke, die ein orthogonales Gegenseitenpaar besitzen, welches bei ihnen die (ausgearbeitete) Gleichseitumhyperbel darstellt, braucht man sich nicht weiter zu kümmern. Sie können als Grenzfall mit extremen Koordinaten betrachtet oder auch separat behandelt werden mit dem orthogonalen Geradenpaar als einfacherem System. Oben ergibt die Rechnung zum Beispiel

$$\sigma = -\frac{U_A(1 + bcd(b + c + d) | bc + bd + cd + b^2c^2d^2 | 2bcd)}{4abcd}.$$

Interessant ist auch das Viereck $F_AF_BF_CF_D$ der Feuerbachpunkte (Neunpunktekreiszentren) der Teildreiecke von $ABCD$. Es ist gegensinnig gegenwinkelsummengleich, ja sogar ähnlich dem Viereck $U_AU_BU_CU_D$. Gibt es vielleicht noch andere Paare merkwürdiger Dreieckspunkte, die, wie U und F aus den vier Teildreiecken genommen, gleich- oder gegensinnig gegenwinkelsummengleiche Vierecke bilden?

4. Will man zu einem gegebenen Viereck $A_1B_1C_1D_1$ ein gegenwinkelsummengleiches Viereck $A_2B_2C_2D_2$ konstruieren, so kann man drei Ecken beliebig wählen, zum Beispiel A_2, B_2, C_2 . Die zugehörige Ecke D_2 ist der zweite Schnittpunkt der Fasskreise über C_2A_2 für die Differenz $\angle(A_1B_1C_1D_1) - \angle A_2B_2C_2$ und über C_2B_2 für $\angle(B_1A_1C_1D_1) - \angle B_2A_2C_2$.

Erwähnt sei auch noch, dass, wenn nur A_2 und B_2 fest gegeben werden und C_2 sich auf einem Kreis bewegt, auch D_2 einen Kreis beschreibt.

5. Die Gegenwinkelsummen eines Vierecks $ABCD$ können auf zwei Arten schön sichtbar gemacht werden (Figur 3).

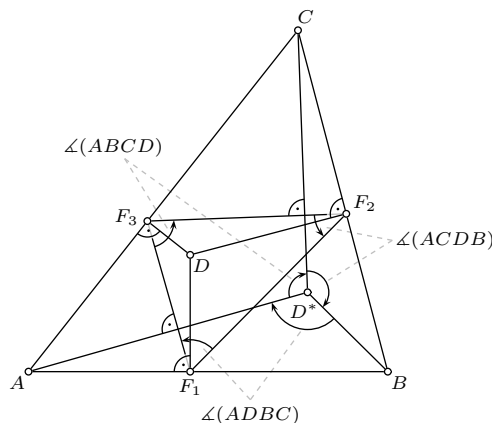


Fig. 3

1) Es seien F_1, F_2, F_3 die Lotfußpunkte von D auf die Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC . Eine kurze Berechnung ergibt

$$\begin{aligned}\angle F_1F_3F_2 &= \angle(ABCD) \\ \angle F_3F_2F_1 &= \angle(ACDB) \\ \angle F_2F_1F_3 &= \angle(ADBC).\end{aligned}$$

Wiederholt man die Rechnung, wie für D , auch für die anderen Ecken, so zeigt es sich, dass alle Fusspunktdreiecke des Vierecks ähnlich sind. Das bedeutet:

Gegenwinkelsummengleiche Vierecke können an ihren Fusspunktdreiecken erkannt werden.

Dazu noch

$$\frac{\overline{F_1F_2}^2}{\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2} = \frac{\overline{F_2F_3}^2}{\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2} = \frac{\overline{F_1F_3}^2}{\overline{BC}^2 \cdot \overline{AD}^2} = \frac{a^2b^2c^2}{(1 + a^2b^2)(1 + a^2c^2)(1 + b^2c^2)}.$$

Die Seiten des Fusspunktdreiecks sind proportional zu den Gegenstreckenprodukten des Vierecks.

Gegenwinkelsummengleiche Vierecke $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ haben proportionale Gegenstreckenprodukte

$$\frac{\overline{A_1B_1} \cdot \overline{C_1D_1}}{\overline{A_2B_2} \cdot \overline{C_2D_2}} = \frac{\overline{A_1C_1} \cdot \overline{B_1D_1}}{\overline{A_2C_2} \cdot \overline{B_2D_2}} = \frac{\overline{A_1D_1} \cdot \overline{B_1C_1}}{\overline{A_2D_2} \cdot \overline{B_2C_2}},$$

und umgekehrt.

2) Die Gegenwinkelsummen sind auch sichtbar beim zu D im Dreieck ABC isogonalkonjugierten Punkt $D'(a + b + c - d|abc - abd - acd - bcd|1 - abcd)$:

$$\begin{aligned}\angle BD'A &= \angle(ADBC) \\ \angle AD'C &= \angle(ABCD) \\ \angle CD'B &= \angle(ACDB).\end{aligned}$$

(D' berechnet man als Umkreismittelpunkt des Dreiecks, gebildet durch die drei Spiegelbilder von D an den Seiten des Dreiecks ABC).

Wenn in der Figur 3 der Punkt D hin zum Umkreis des Dreiecks ABC verschoben wird, schwindet das Fusspunktdreieck $F_1F_2F_3$ zu einer Strecke zusammen, und D' wandert ins Unendliche, denn bei einem Kreisviereck sind die Gegenwinkelsummen gleich Null.

Damit gelangt man zur WALLACE- oder SIMSONgeraden und zum Satz von PTOLEMÄUS, der besagt, dass bei einem Kreisviereck das grösste Gegenstreckenprodukt gleich der Summe der beiden anderen ist.

Es folgen in den Abschnitten 6 bis 12 eine Auswahl geometrischer Probleme, bei denen gegenwinkelsummengleiche Vierecke eine Rolle spielen.

6. Die Ecken eines Vierecks $ABCD$ werden an einem Kreis invertiert (nur die Ecken, nicht das Viereck insgesamt) (Figur 4).

Sie gehen über in die Ecken A^*, B^*, C^*, D^* eines Vierecks, das dem Viereck $ABCD$ gegensinnig gegenwinkelsummengleich ist.

Zum Beweis betrachtet man zuerst nur zwei Punkte A, B . Das Viereck, das diese zusammen mit A^*, B^* bilden, ist ein Kreisviereck. Darum $\angle ABM = \angle MA^*B^*$, ebenso $\angle MBC = \angle B^*C^*M$ und zusammengesetzt

$$\angle ABC = \angle MA^*B^* + \angle B^*C^*M = \angle C^*B^*A^* + \angle A^*MC^*.$$

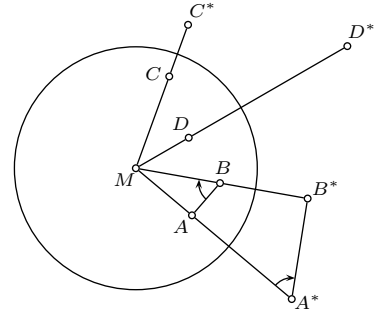


Fig. 4

Genau gleich $\angle CDA = \angle A^*D^*C^* + \angle C^*MA^*$. Durch Addition $\angle(ABCD) = -\angle(A^*B^*C^*D^*)$. Und ebenso $\angle(ACDB) = -\angle(A^*C^*D^*B^*)$.

Wenn D mit M zusammenfällt, ist D^* nicht endlich, und die Formel reduziert sich auf

$$\angle ABCM = -\angle A^*B^*C^*.$$

Dass Kreisvierecke bei einer solchen Eckeninversion in Kreisvierecke übergehen, ist von Anfang an klar, da Kreisinvolutionen kreistreu sind. Dazu kommt aber noch, dass die Doppelverhältnisse von A, B, C, D und A^*, B^*, C^*, D^* auf ihren Umkreisen gleich sind.

Gibt es zu einem Dreieck ABC einen Kreis k so, dass die zu A, B, C bezüglich k inversen Punkte A^*, B^*, C^* ein Dreieck bilden, das einem vorgegebenen Dreieck $A_1B_1C_1$ ähnlich ist?

Ja, aus $\angle(ABCM) = -\angle A^*B^*C^* = -\angle A_1B_1C_1$ folgt $\angle AMC = \angle ABC + \angle A_1B_1C_1$ und ebenso $\angle BMA = \angle BCA + \angle B_1C_1A_1$. Der Mittelpunkt M von k kann mit zwei Fasskreisen konstruiert werden. Radius beliebig.

Wenn $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ zwei gegensinnig gegenwinkelsummengleiche Vierecke sind, dann gibt es zum Viereck $A_1B_1C_1D_1$ einen Kreis, an dem es eckeninvertiert in ein dem Viereck $A_2B_2C_2D_2$ ähnliches übergeht. Man nimmt einfach den Kreis, der für das Teildreieck $A_1B_1C_1$ die Bedingung erfüllt. Die vierte Ecke kommt dann automatisch richtig.

So ist gezeigt, dass irgend zwei gegenwinkelsummengleiche Vierecke durch Ähnlichkeitsabbildungen und Eckeninversion an einem Kreis ineinander übergeführt werden können.

Ganz spezielle Verhältnisse liegen vor, wenn der Mittelpunkt M des Kreises, an dem ein Viereck $ABCD$ eckeninvertiert wird, der Tangentialpunkt von $ABCD$ ist. M ist dann auch der Tangentialpunkt des Bildvierecks $A^*B^*C^*D^*$, und dessen Gleichseithyperbelzentrum ist invers zum singulären Brennpunkt von $ABCD$, und umgekehrt. Und beide Vierecke haben dieselbe σ -Zahl.

Der Tangentialpunkt T eines Vierecks $ABCD$ [4] – unter den merkwürdigen Punkten eines Vierecks ist er der wichtigste – ist der Punkt mit der Winkeleigenschaft

$$\angle XTY = \angle XZY + \angle XWY \quad (\{X, Y, Z, W\} = \{A, B, C, D\})$$

7. Gegeben sei ein Viereck $ABCD$ (Figur 5). Ein Punkt P wird isogonal abgebildet bezüglich jedes Teildreiecks von $ABCD$: A' sei der zu P isogonalkonjugierte Punkt bez. BCD , B' bez. CDA , ...

Die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sind gegenwinkelsummengleich, egal welcher Punkt P in der Ebene gewählt wird.

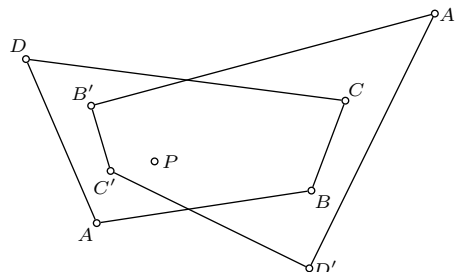


Fig. 5

Man bewege (mit *Cabri*) den Punkt P in alle Richtungen. Das Viereck $A'B'C'D'$, welches bizarre Formen annehmen kann, behält immer seine Winkeleigenschaft.

Wenn P gerade die Position des Tangentialpunktes von $ABCD$ einnimmt, sind $A'B'C'D'$ und $ABCD$ kongruent.

Dazu kommt ein weiterer merkwürdiger Sachverhalt. Wenn man entsprechende Seiten der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ schneidet, scheinen die sechs Schnittpunkte $P_{AB} = AB \cap A'B'$, $P_{AC} = AC \cap A'C'$, ... auf den ersten Blick wild verstreut in der Ebene zu liegen. Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass die Verbindungen

$$f_1 = P_{AB}P_{CD}, \quad f_2 = P_{AC}P_{BD}, \quad f_3 = P_{AD}P_{BC}$$

kopunktal sind in einem Punkt S . Und überraschend werden dort die Gegenwinkelsummen sichtbar

$$\begin{aligned} \angle(ABDC) &= \angle f_1 f_2 \\ \angle(ACBD) &= \angle f_2 f_3 \\ \angle(ADBC) &= \angle f_3 f_1. \end{aligned}$$

Nicht genug damit. Es sei A_1 der zu A isogonalkonjugierte Punkt im Dreieck BCD , B_1 isogonalkonjugiert zu B im Dreieck CDA , ... Die Geraden $A'A_1, B'B_1, C'C_1, D'D_1$ bilden ein Vierseit. Dieses Vierseit behält dauernd seine Form, wenn P in der Ebene bewegt wird, es verändert nur seine Grösse.

8. Bei einem gegebenen Viereck $ABCD$ wird durch jedes Eckenpaar ein Kreis gelegt und zwar so, dass bei jedem Teildreieck die drei beteiligten Kreise sich in einem Punkt treffen, der beim Dreieck ABC mit D^* bezeichnet wird, beim Dreieck BCD mit A^* , ... (In der Figur 6 sind von den sechs Kreisen nur deren drei eingezeichnet).

Geht das überhaupt?

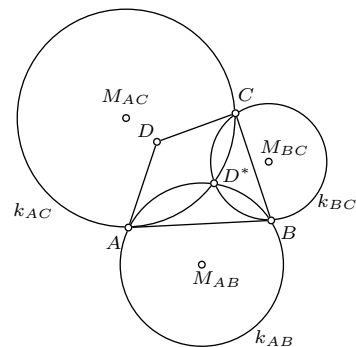


Fig. 6

Wir wollen mit der Konstruktion der ganzen Figur bei der Ecke D beginnen und auf Gutglück die Kreise k_{AD}, k_{BD}, k_{CD} beliebig wählen. Durch sie sind die Punkte A^*, B^*, C^* festgelegt:

$$k_{BD} \cap k_{CD} = \{D, A^*\}, \quad k_{AD} \cap k_{CD} = \{D, B^*\}, \quad k_{AD} \cap k_{BD} = \{D, C^*\}.$$

Und nun stellt man erfreut fest, dass die drei weiteren Kreise k_{AB} (durch A, B, C^*), k_{BC} (durch B, C, A^*), k_{AC} (durch A, C, B^*) tatsächlich auch einen gemeinsamen Punkt haben: D^* .

Die analytische Rechnung hier ist kompliziert, kann aber vereinfacht werden, dadurch dass man sich zuerst alles an einem Kreis um D invertiert denkt und so drei Kreise zu Geraden macht. Bei dieser schönen Sechskreise-Konfiguration gilt:

*Wie immer die drei ersten Kreise gewählt werden, das entstehende Viereck $A^*B^*C^*D^*$ und das Ausgangsviereck $ABCD$ sind gegensinnig gegenwinkelsummengleich.*

Interessant ist auch das von den sechs Kreismittelpunkten $M_{AB}, M_{BC}, \dots$ gebildete Sechseck. Die Punkte liegen nur scheinbar unregelmässig verstreut in der Ebene.

Solche Sechsecke entstehen, wenn die Ecken eines Vierseits an einem Kreis invertiert werden.

9. Mit *Cabri* lässt sich herrlich experimentieren. Man nehme ein Viereck $ABCD$ und einen Punkt P .

Es sei T_A der Tangentialpunkt des Vierecks $PBCD$, T_B der Tangentialpunkt von $PCDA, \dots$

Die Vierecke $T_AT_BT_CT_D$ und $ABCD$ sind gegenwinkelsummengleich.

Es sei Z_A das Zentrum der Gleichseitumhyperbel des Vierecks $PBCD, \dots$

Die Vierecke $Z_AZ_BZ_CZ_D$ und $ABCD$ sind gegensinnig gegenwinkelsummengleich.

10. Mit Hilfe eines gegebenen Vierecks $ABCD$ wird eine Abbildung der Ebene definiert (Figur 7).

P sei irgend ein Punkt. Die Kreise über dem Gegenstreckenpaar AB, CD , welche durch P laufen, liefern als zweiten Schnittpunkt einen Punkt X . Und die Kreise durch X über dem Gegenstreckenpaar AD, BC liefern in gleicher Weise den Punkt P^* .

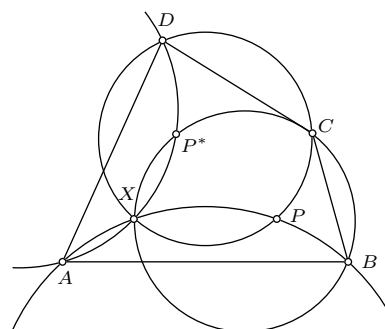


Fig. 7

Die Abbildung $P \rightarrow P^*$ soll betrachtet werden.

Sie bildet den Diagonalpunkt des dritten, eben nicht gebrauchten Gegenseitenpaares AC, BD ab in den Tangentialpunkt des Vierecks $ABCD$. Von da her kommt die Idee zu dieser Abbildung [3].

Die Abbildung $P \rightarrow P^$ bildet die Ecken eines Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ab in die Ecken $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$ eines gegenwinkelsummengleichen Vierecks.*

Aber sie ist nicht etwa projektiv: Geraden gehen über in Kreise. Muss da nicht eine Kreisinversion dahinter stecken, irgendwie kombiniert mit einer Spiegelung?

Man prüfe auch, wie sich eine Vertauschung der Rollen der drei Gegenstreckenpaare auswirkt.

11. Gegeben sind ein Viereck $ABCD$ und irgend eine Gerade g .

Die Gerade g bildet zusammen mit den Seiten jedes Teildreiecks von $ABCD$ ein Vierseit. Was lässt sich über die Steinerpunkte dieser vier Vierseite sagen?

S_A sei der Steinerpunkt des Vierseits, gebildet durch g, BC, CD, DB . Entsprechend S_B, S_C, S_D .

Die Vierecke $S_AS_BS_CS_D$ und $ABCD$ sind gegenwinkelsummengleich.

Merkwürdigerweise liegt hier, wenn entsprechende Seiten der Vierecke $ABCD$ und $S_AS_BS_CS_D$ miteinander geschnitten werden: $P_{AB} = AB \cap S_AS_B, \dots$, eine Konfiguration vor wie im Beispiel von Abschnitt 7. Die Geraden $f_1 = P_{AB}P_{CD}, \dots$ laufen wie dort in einem Punkt S zusammen, die Gegenwinkelsummen sichtbar machend.

Drei Positionen der Geraden g fallen besonders auf. Es sind dies drei spezielle Geraden durch das Zentrum Z der Gleichseitumhyperbel von $ABCD$: Ihre Asymptoten und die Orthogonale zur Verbindungsline von Z und dem Tangentialpunkt T von $ABCD$. Wenn g eine dieser drei Geraden ist, fällt S mit T zusammen.

Dann sind übrigens die Achsen der Berührparabeln der vier Vierseite parallel, in einem Fall parallel zur reellen Asymptote der Zirkularkurve 3.Ordnung, die durch die Ecken und Diagonalepunkte und den Tangentialpunkt des Vierecks $ABCD$ geht.

12. Zum Schluss ein Vierseitproblem.

Berechnungen bei einem Vierseit macht man möglich mit Hilfe seiner Berührparabel. Ihre Achse und Scheiteltangente werden als Koordinatenachsen genommen. Mit dem Ansatz $A(a|a^2|1)$ bekommt die Tangente t_A in A die Koordinaten $(2a|-1|-a^2)$, der Schnittpunkt von t_B und t_C : $(b+c|2bc|2)$, der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $t_B t_C t_D$:

$$(2(b+c+d-4bcd|1+4bc+4bd+4cd|8))$$

usw.

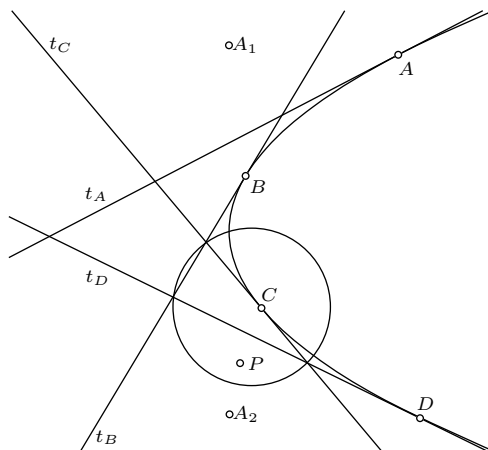


Fig. 8

Es sei nun ein Punkt P gegeben (Figur 8). Er soll bei jedem Teildreiseit sowohl isogonal abgebildet als auch an dessen Umkreis invertiert werden.

A_1 sei der isogonalkonjugierte Punkt zu P bez. des Dreiseits $t_B t_C t_D$ und A_2 sei der inverse Punkt bez. des Umkreises von $t_B t_C t_D$. Entsprechend $B_1, B_2, \dots$

Die Vierecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ sind gegenwinkelsummengleich.

Der Phantasie sind beim Thema "Gegenwinkelsummengleiche Vierecke" keine Grenzen gesetzt.

Zum Beispiel könnte man beim Beispiel aus Abschnitt 11 statt des Vierecks ein Vierseit nehmen und die durch g und die Seiten der Teildreiseite gebildeten Vierseite betrachten. ...

Literatur

- [1] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1988.
- [2] Laborde J.- M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
- [3] Stärk R.: P1024. Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. Praxis der Mathematik, PM40(1998) 183-186. Aulis Verlag, Köln.
- [4] Stärk R./Baumgartner D.: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. Praxis der Mathematik PM44 (2002) 19-27. Aulis Verlag, Köln.
- [5] Stärk R.: Eine merkwürdige Zahl des Vierecks. Praxis der Mathematik, PM46 (2004) 26-31. Aulis Verlag, Köln.

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk
Im Santenbühl
CH-8234 Stetten
roland.staerk@sunrise.ch