

Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks ¹

Daniel Baumgartner, Roland Stärk

Gegeben sind in der Ebene vier Punkte A, B, C, D . Man zeige, dass es einen Punkt T gibt, der die folgenden Winkelbedingungen (orientierte Winkel modulo 180°) erfüllt:

$$\begin{aligned}\angle ATB &= \angle ADB + \angle ACB, & \angle BTC &= \angle BAC + \angle BDC \\ \angle CTD &= \angle CTD + \angle CTD, & \angle CTD &= \angle CTD + \angle CTD\end{aligned}$$

Diese Aufgabe, kürzlich in [3] veröffentlicht, hat bei Elementargeometern einiges Interesse geweckt, zeigt es sich doch, dass ein Existenzbeweis für den Punkt T nicht so einfach ist, wie man anfänglich erwartet. Genauere Untersuchungen führen zu überraschenden Entdeckungen. Dieser Punkt T entpuppt sich als einer der merkwürdigsten "Merkwürdigen Punkte" des (allgemeinen) Vierecks.

Um seine Bedeutung zu demonstrieren, seien hier im voraus schon drei seiner Eigenschaften vorgestellt. Sie werden nachher untersucht:

(1) Es seien U_A, U_B, U_C, U_D die Umkreismittelpunkte und r_A, r_B, r_C, r_D die Umkreisradien der Teildreiecke BCD, CDA, DAB, ABC eines Vierecks $ABCD$ (Fig.1). Für den Punkt T des Vierecks gilt:

$$\frac{r_A}{TU_A} = \frac{r_B}{TU_B} = \frac{r_C}{TU_C} = \frac{r_D}{TU_D}.$$

Das bedeutet, dass bei einem Viereck, bei dem T ausserhalb der Kreise zu liegen kommt, diese von T aus alle unter dem gleichen Winkel gesehen werden.

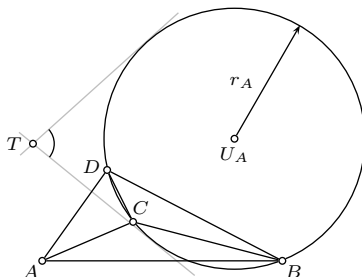


Fig. 1

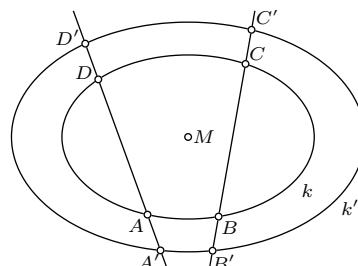


Fig. 2

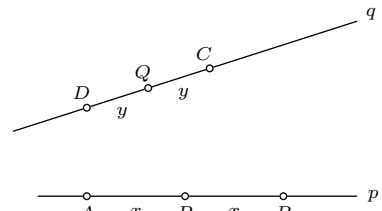


Fig. 3

(2) Ein Kegelschnitt k , der von zwei Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten wird, wird mit einer Streckung vom Zentrum M aus in k' übergeführt (Fig.2). Es zeigt sich, dass das Viereck $A'B'C'D'$ der Schnittpunkte der Geraden mit k' genau den gleichen Punkt T hat wie das Viereck $ABCD$.

(3) Gegeben sind ein Punkt P auf einer Geraden p und ein Punkt Q auf einer Geraden q (Fig.3). Man trägt auf p von P aus auf beide Seiten eine Strecke x ab und auf q von Q aus eine Strecke y . Betrachtet wird der Punkt T des Vierecks $ABCD$ der Endpunkte dieser Strecken. Er bewegt sich auf einem Kreis, wenn x und y beliebig variiert werden.

Der vorliegende Beitrag will zeigen, wie man mit modernen Mitteln, und das soll hier heissen: mit Computerunterstützung, in die Geheimnisse dieses Punktes T eindringen kann. Vieles ist noch unerforscht.

Die Elementargeometrie hat sich in früheren Zeiten zur Aufgabe gesetzt, geometrische Sachverhalte mit möglichst wenig Algebra zu behandeln. Ein heute wohl überholter Standpunkt, da jetzt Computeralgebrasysteme zur Verfügung stehen, die alle mühsame Rechenarbeit übernehmen können. Die Möglichkeiten sind grossartig, umfangreiche algebraische Ausdrücke, die früher von Hand nicht zu bewältigen waren, können heutzutage bearbeitet werden. Natürlich ist die Planung, Durchführung und Auswertung einer analytischen Rechnung nach wie vor Sache des Menschen, man kann z.B. bei (2) dem Computer nicht einfach die Gleichungen der Kegelschnitte und der Geraden eingeben und ein algebraisches Resultat erwarten, das ist klar. Die Dinge müssen sorgfältig entwickelt, meistens am besten kombiniert synthetisch/analytisch aufgebaut werden. Wir haben hier *Mathematica* [4] verwendet. Das zweite Hilfsmittel

¹Publiziert in PM (Praxis der Mathematik) 1/44 Jg.2002.

für den Geometer ist das Konstruktionssystem *Cabri* [5]. Mit diesem Zeichnungsverfahren können planimetrische Konstruktionen auch mit Kegelschnitten elegant und übersichtlich durchgeführt werden. Da die Ausgangselemente einer Konstruktion nachträglich verändert werden können, ist *Cabri* ein ideales Instrument für das Experimentieren mit geometrischen Figuren, besonders für die Untersuchung von Ortskurven. Häufig wiederkehrende Konstruktionselemente können den Bedürfnissen entsprechend als Makros aufgezeichnet werden.

Gearbeitet wird im Folgenden mit einem Cartesischen Koordinatensystem. Die Punkte sollen aber im Computer mit homogenen Zahlentripeln erfasst werden, damit auch Fernpunkte miteinbezogen werden können. Die Liste $\{t_1, t_2, t_3\}$ stellt, wenn t_3 verschieden von 0 ist, den Punkt mit den gewöhnlichen Koordinaten $(\frac{t_1}{t_3}, \frac{t_2}{t_3})$ dar. $\{t_1, t_2, 0\}$ ist der Fernpunkt der Geraden, die vom Nullpunkt zum Punkt mit den gewöhnlichen Koordinaten (t_1/t_2) führt. Auch Geraden werden mit Tripeln beschrieben: Die Gerade $\{a, b, c\}$ hat in gewöhnlichen Koordinaten x und y die Gleichung $ax + by + c = 0$. Die Ferngerade ist das Tripel $\{0, 0, 1\}$. Verbinden von Punkten und Schneiden von Geraden gestaltet sich dann, wie das aus der Projektiven Geometrie bekannt ist.

Um speditiv mit dem Computer arbeiten zu können, muss man sich aber zuerst eine Prozedur-Sammlung für die wichtigsten analytischen Grundrechnungen selber anlegen.

Beginnen wir mit "Gerade durch die Punkte u und v ":

```
Verb[u_, v_] := Cross[u, v]
```

Ebenso "Schnittpunkt der Geraden u und v ":

```
Schneid[u_, v_] := Verb[u, v]
```

Halt, eines darf man nicht vergessen. Die Koordinatentripel müssen laufend in die einfachste Form gebracht werden, sonst türmen sich die Formeln mit der Zeit unüberwindbar auf. Die Koordinaten von Punkten und Geraden in unseren Rechnungen sind, wie man sehen wird, immer rationale Ausdrücke in gewissen Ausgangsgrößen. Sie müssen jeweils gekürzt werden, und bei einem Koordinatentripel mit rationalen Ausdrücken sollen die Nenner wegmultipliziert und gemeinsame Zählerfaktoren wegdividiert werden.

"Vereinfachen eines Tripels p ":

```
verei[p_] := Module[{h, h1, h2},
  h = Together[p];
  h1 = PolynomialGCD[Sequence@@Numerator[h]];
  h2 = PolynomialLCM[Sequence@@Denominator[h]];
  Factor[h h2/h1]];
```

Aus z.B. $\{(a-1)/(bc), (1-a^2)/b^2, ac-c\}$ wird so $\{b, -c(1+a), b^2c^2\}$. Wir verbessern oben:

```
Verb[u_, v_] := verei[Cross[u, v]]
```

Einige weitere wichtige Prozeduren (Eine Auswahl von definierenden Formeln zeigt die Tabelle Fig.4):

Orth[u, v]	Orthogonale Gerade durch den Punkt u zur Geraden v
Teil[u, v, t]	Die Strecke vom Punkt u zum Punkt v im Verhältnis t teilen
Spieg[u, v]	Den Punkt u an der Geraden v spiegeln
Mitt[u, v]	Mittelsenkrechte der Punkte u und v
Umk[u, v, w]	Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte u, v, w
Distq[u, v]	Quadrat der Distanz vom Punkt u zum Punkt v
Invert[p, m, r]	Den Punkt p am Kreis um den Punkt m mit dem Radius r invertieren
Inh[u, v, w]	(Orientierter) Inhalt des Dreiecks mit den Ecken u, v, w
Tg[u, v, w]	Tangens des (orientierten) Winkels Punkt u Punkt v Punkt w
KollQ[u, v, w]	Sind die Punkte u, v, w kollinear?
InzQ[u, v]	Liegt der Punkt u auf der Geraden v ?

Zuerst berechnen wir die Gleichung $kr_1 = 0$ des Fasskreises über der Seite AB . Unter Anwendung des Additionstheorems für die Tangensfunktion kann kr_1 mit dem laufenden Punkt $pP = \{t_1, t_2, t_3\}$; folgendermassen geschrieben werden

```
kr1=Numerator[ Factor[
  Tg[pA,pP,pB]-(Tg[pA,pD,pB]+Tg[pA,pC,pB])/(1-Tg[pA,pD,pB]Tg[pA,pC,pB]) ]]
```

Der Mittelpunkt dieses Kreises, der Pol der Ferngeraden, ist

```
pM1=Pol[kr1,{0,0,1}]
```

Die Gleichung des Kreises ist aber zu umfangreich, um hier abgedruckt zu werden. Wir lassen einfach den Computer machen.

Ebenso der Fasskreis über der Seite BC

```
kr2=Numerator[ Factor[ Tg[pB,pP,pC]-(...)/(1-...) ]]
pM2=Pol[{0,0,1},kr2]
```

Nun muss nur noch der den beiden Kreisen gemeinsame Punkt B an der Zentralen gespiegelt werden

```
pT=Spieg[ pB, Verb[pM1,pM2] ]
```

Überraschend ist das einfache Resultat

$\{-a - b - c - d, -abc - abd - acd - bcd, -1 - abcd\}$
oder in gewöhnlichen Koordinaten

$$T\left(\frac{a+b+c+d}{1+abcd} \middle/ \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}{1 + \frac{1}{abcd}}\right).$$

Man sieht, dass auch die übrigen Fasskreise denselben Punkt liefern, da die Koordinaten von A, B, C, D alle gleich vertreten sind. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Und der Aufgabentext kann noch ergänzt werden mit

$$\angle ATC = \angle ABC + \angle ADC, \quad \angle BT D = \angle BAD + \angle BCD,$$

denn es geht hier um ein *allgemeines* Viereck, alle sechs Seiten sind gleichberechtigt.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Winkel stets orientiert modulo 180° gemeint sind, wie das in der fortgeschrittenen Elementargeometrie allgemein üblich ist.

Die Formel für T macht aufmerksam auf den Ausnahmefall $abcd = -1$. Dann ist das Viereck $ABCD$ orthozentrisch, jede Ecke ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks, gebildet durch die drei anderen. Einem orthozentrischen Viereck können unendlich viele gleichseitige Hyperbeln umschrieben werden, und jeder Fernpunkt hat die Eigenschaften, die von T verlangt werden.

Erwähnt werden muss noch der Spezialfall, wo die gleichseitige Hyperbel, die man durch A, B, C, D legt, ausgeartet, also ein orthogonales Geradenpaar ist. Dann geht der obige Ansatz nicht. Es sei dem Leser überlassen, z.B. für den Fall, dass zwei Gegenseiten des Vierecks $ABCD$ orthogonal sind, mit dem Ansatz $A(x_1/0), B(x_2/0), C(0/y_1), D(0/y_2)$ den Punkt T auch zu berechnen. Im Folgenden wird dieser Grenzfall nicht weiter berücksichtigt.

2. Grundlegend in der Elementargeometrie ist der Begriff der Isogonalität bezüglich eines Dreiecks. Zwei Punkte heissen isogonalkonjugiert, wenn ihre Ecktransversalen symmetrisch sind bezüglich der Winkelhalbierenden der jeweiligen Ecke. Spiegelt man einen Punkt P an allen drei Seiten des Dreiecks, so ist, wie man leicht sieht, der Umkreismittelpunkt des Dreiecks, gebildet durch die Spiegelbilder, der zu P isogonalkonjugierte Punkt bezüglich des Dreiecks.

Zum Beispiel sind die Brennpunkte eines einem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts isogonalkonjugiert bezüglich des Dreiecks [3]. Erwähnt sei hier auch noch, dass die zu den Punkten einer Geraden isogonalkonjugierten Punkte einen Umkegelschnitt des Dreiecks bilden. Zur Ferngeraden gehört der Umkreis.

Wir fügen unserer *Mathematica*-Algorithmensammlung noch den Algorithmus an, welcher den zum Punkt p bezüglich des Dreiecks uvw isogonalkonjugierten Punkt berechnet:

```
Isog[p_, u_, v_, w_] :=
  Umk[Spieg[p, Verb[u, v]], Spieg[p, Verb[v, w]], Spieg[p, Verb[w, u]]];
```

Und auch bei *Cabri* sollte man den betreffenden Makro bereitstellen.

Wenn man beim Experimentieren mit Vierecken auf die Idee kommt, bei einem Viereck $ABCD$ auch das Viereck der Umkreismittelpunkte U_A, U_B, U_C, U_D der Teildreiecke BCD, CDA, DAB, ABC zu betrachten oder den zu A bez. des Dreiecks BCD isogonalkonjugierten Punkt A^* , den zu B bez. des Dreiecks CDA isogonalkonjugierten Punkt B^* etc. zu konstruieren, dann stellt man mit Überraschung fest, dass die Vierecke $U_A U_B U_C U_D$ und $A^* B^* C^* D^*$ perspektiv-ähnlich sind und dass der Punkt T des Vierecks $ABCD$ das Zentrum dieser Ähnlichkeit ist. Und mehr noch: T ist invers zu A^*, B^*, C^*, D^* bezüglich der Umkreise der Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC .

Satz(Fig.5). *Der zur Ecke A des Vierecks $ABCD$ bezüglich des Dreiecks BCD isogonalkonjugierte Punkt A^* und der Punkt T des Vierecks sind invers bezüglich des Umkreises des Dreiecks BCD .*

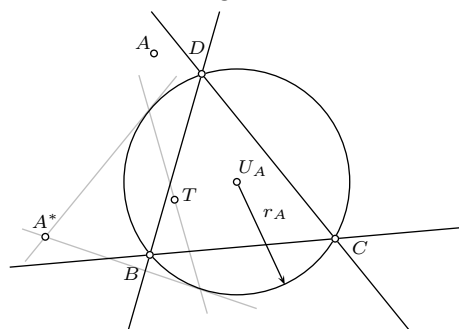


Fig. 5

Beweis. Fortsetzung der Rechnung 1.

```
pAs = Isog[pA,pB,pC,pD];
pUA = Umk[pB,pC,pD];
rAq = Distq[pUA,pB];
Invert[ pAs,pUA,Sqrt[rAq] ]
```

Damit ist fortan ein elegantes Verfahren gefunden, den Punkt T eines Vierecks zu berechnen und zu konstruieren: Eine Ecke im Dreieck, gebildet durch die drei andern, isogonal abbilden und dann am Umkreis des Dreiecks invertieren.

Mathematica-Prozedur und *Cabri*-Makro ...

Es sei noch bemerkt, dass diese Berechnung des Punktes T sich auch durchführen lässt, wenn nicht alle Koordinaten reell sind. Man sollte sowieso bei der ganzen Theorie den Körper der komplexen Zahlen im Auge behalten. Die imaginären Kreispunkte z.B. schreiben sich in unserem Koordinatensystem als $(1, i, 0), (1, -i, 0)$.

3. Satz. *Das Viereck, gebildet durch die Umkreismittelpunkte U_A, U_B, U_C, U_D der Teildreiecke BCD, CDA, DAB, ABC eines Vierecks $ABCD$ hat denselben Punkt T wie das Viereck $ABCD$.*

Man führt die Rechnung 2 weiter.

Es lassen sich jetzt viele interessante Formeln herleiten. Zum Beispiel zeigt

```
In[ ]:= Factor[rAq/Distq[pT,pUA]]
Out[ ]:= (abcd + 1)^2 / (abcd - 1)^2
```

die Eigenschaft (1) der Einleitung.

Die folgenden Formeln lassen sich alle leicht nachrechnen:

$$\overline{TA} : \overline{TB} : \overline{TC} : \overline{TD} = \frac{1}{r_A} : \frac{1}{r_B} : \frac{1}{r_C} : \frac{1}{r_D}$$

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TC}} = \frac{|\sin(\angle BCD)|}{|\sin(\angle BAD)|}$$

$$\begin{aligned} \overline{TA}^2 \cdot \overline{TB}^2 \cdot \overline{TC}^2 \cdot \overline{TD}^2 &= \text{Potenz von } T \text{ bez. Umkreis } BCD \cdot \\ &\quad \text{Potenz von } T \text{ bez. Umkreis } CDA \cdot \dots \\ \frac{\overline{TA} \cdot \overline{TB} \cdot \overline{TC} \cdot \overline{TD}}{(\text{Inhalt Diagonaldreieck von } ABCD)^2} &= \frac{\overline{TU_A} \cdot \overline{TU_B} \cdot \overline{TU_C} \cdot \overline{TU_D}}{(\text{Inhalt Diagonaldreieck von } U_A U_B U_C U_D)^2} \end{aligned}$$

A und U_A sind isogonalkonjugiert bez. Dreieck $U_B U_C U_D$

Was stellt man (mit *Cabri*) sonst noch fest?

Vielleicht, dass die Geraden TA und TU_A , TB und TU_B , TC und TU_C , TD und TU_D symmetrisch sind bezüglich einer merkwürdigen Geraden durch T .

4.Satz(Fig.6). Die Strecken TA, TB, TC, TD vom Punkt T eines Vierecks $ABCD$ zu den Ecken sind so lang wie die (Haupt-)Achsen der den Teildreiecken BCD, CDA, DAB, ABC eingeschriebenen Kegelschnitte, die T als einen Brennpunkt besitzen.

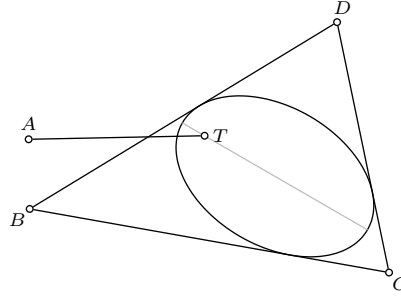


Fig. 6

Beweis. Bei einem Kegelschnitt liegen die Fusspunkte der von einem Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lote auf dem Hauptscheitelkreis (bei einer Parabel auf der Scheiteltangente) [2]. Beim Kegelschnitt mit dem Brennpunkt T , der dem Dreieck BCD eingeschrieben ist (der die Seiten des Dreiecks berührt) ist die Hauptachse somit ein Durchmesser des Fusspunktkreises von T .

```
ln[ ]:= pT1 = Schneid[ Orth[pT,Verb[pB,pC]], Verb[pB,pC] ];
pT2 = Schneid[ Orth[pT,Verb[pC,pD]], Verb[pC,pD] ];
pT3 = Schneid[ Orth[pT,Verb[pD,pB]], Verb[pD,pB] ];
pM = Umk[pT1,pT2,pT3];
rq = Distq[pM,pT1];
Factor[ Distq[pT,pA]/(4 rq) ]
```

Out[]= 1

5. Durch die Ecken und die drei Diagonalpunkte eines Vierecks lässt sich eine Zirkularkurve dritter Ordnung legen. Es stellt sich die Frage, wie ihre Gleichung bei unserem Viereck mit den Ecken $pA = \{a, 1/a, 1\}, pB, pC, pD$ lautet. Mit dem Ansatz

$$z_1 t_1^3 + z_2 t_2^3 + z_3 t_3^3 + z_4 t_1^2 t_2 + z_5 t_1 t_2^2 + z_6 t_2^2 t_3 + z_7 t_2 t_3^2 + z_8 t_3^2 t_1 + z_9 t_3 t_1^2 + z_{10} t_1 t_2 t_3 = 0$$

kommt man zu einem linearen Gleichungssystem für die Koeffizienten $z_1, \dots, z_{10}$, wenn man die erwähnten Punkte nebst den beiden imaginären Kreispunkten einsetzt (Es empfiehlt sich, die Elimination schrittweise vorzunehmen). Es stellt sich heraus, dass diese Kurve auch durch den Punkt T des Vierecks läuft und dass sie die Geraden von T aus zu den Ecken in diesen berührt.

Der Punkt T soll deshalb in Anlehnung an die Theorie der Kurven dritter Ordnung von jetzt an als **Tangentialpunkt** des Vierecks bezeichnet werden. In unserer Theorie spielt die Zirkularkurve aber weiter keine Rolle.

6. Bei einem Vierseit gehen die Umkreise der vier Teildreiseite, die von je drei Seiten des Vierseits gebildet werden, durch einen gemeinsamen Punkt, den *Steinerpunkt* des Vierseits [1]. Und die Mittelpunkte dieser Umkreise liegen zusammen mit dem Steinerpunkt auch auf einem Kreis.

In Fortführung der bisherigen Rechnungen lässt sich leicht die folgende Eigenschaft des Tangentialpunkts nachweisen.

Satz(Fig.7): Bei einem Viereck $ABCD$ sei S der Steinerpunkt des durch die Geraden AB, BC, CD, DA gebildeten Vierseits. Die beiden Kreise durch S und je zwei Gegenecken des Vierseits gehen dann auch durch den Tangentialpunkt des Vierecks.

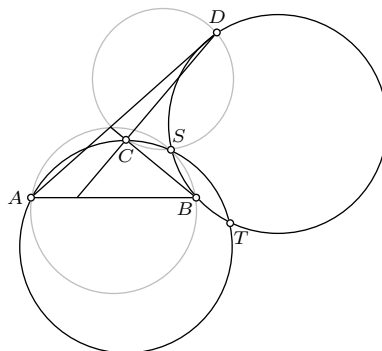


Fig. 7

Es bleibt dem Leser überlassen, aus dieser Eigenschaft des Tangentialpunkts einen synthetischen Existenzbeweis zu entwickeln. Es ist der in [3] dargestellte.

In einem Viereck $ABCD$ stecken insgesamt drei Vierseite, gebildet durch jeweils zwei Gegenseitenpaare. Neben dem oben erwähnten noch das durch die Seiten AB, BD, DC, CA und das durch die Seiten BD, DA, AC, CB gebildete. Ein Viereck hat somit drei solche Steinerpunkte.

Man sollte mit *Cabri* alles zeichnen. Die oben erwähnten Kreise durch die Umkreismittelpunkte der Teildreiseite der Vierseite haben auch wieder einen gemeinsamen, geheimnisvollen Punkt....

7.Satz. Werden die Ecken eines Vierecks $ABCD$ an einem Kreis um seinen Tangentialpunkt T invertiert in A', B', C', D' , dann hat das Viereck $A'B'C'D'$ auch den Tangentialpunkt T .

Beweis. Hier weichen wir einer analytischen Rechnung, die zu aufwendig wäre, aus. Wenn drei Punkte U, V, W an einem Kreis um einen Punkt M invertiert werden in U', V', W' , dann gilt die Formel $\angle U'V'W' + \angle U'V'W = \angle UMW$ [1]. Aus $\angle ACB + \angle A'C'B' = \angle ATB$ und $\angle ADB + \angle A'D'B' = \angle ATB$ folgt durch Addition $\angle A'C'B' + \angle A'D'B' = \angle ATB$.

Und dass die Steinerpunkte des Vierecks $ABCD$ invers sind zu den Diagonalknoten des Vierecks $A'B'C'D'$ und umgekehrt, folgt aus 6.

Man sollte sich nicht immer einseitig auf den analytischen Weg versteifen, manchmal werden Formeln für einfache Dinge äusserst umfangreich.

Dass die Vierecke $A'B'C'D'$ und $A^*B^*C^*D^*$ (siehe 2) ähnlich sind, lässt sich aber wieder analytisch wohl am leichtesten beweisen.

8. Der Tangentialpunkt T eines Vierecks $ABCD$ wird an den sechs Seiten des Vierecks gespiegelt. Was lässt sich über das Sechseck der Spiegelpunkte sagen?

Satz. Spiegelt man den Tangentialpunkt eines Vierecks $ABCD$ an den Seiten des Vierecks, so bekommt man ein zentralsymmetrisches Sechseck, dessen Zentrum das Zentrum Z der gleichseitigen Hyperbel durch A, B, C, D ist.

Man betrachte auch den Umkegelschnitt dieses Sechsecks. Wie verlaufen seine Achsen?

9. Ebenso leicht lässt sich analytisch der folgende Satz beweisen.

Satz. Spiegelt man eine Ecke eines Vierecks $ABCD$ am Zentrum Z der gleichseitigen Hyperbel durch A, B, C, D , so bekommt man den zum Tangentialpunkt T des Vierecks isogonalkonjugierten Punkt bezüglich des durch die drei andern Ecken gebildeten Dreiecks.

Es zeigt sich, dass dieser Punkt Z , das Zentrum der gleichseitigen Hyperbel durch A, B, C, D – wir sagen das "Gleichseitigehyperbelzentrum des Vierecks $ABCD$ – häufig im Zusammenspiel mit dem Tangentialpunkt T anzutreffen ist und sich auch als bedeutender merkwürdiger Viereckspunkt entpuppt.

Das wird deutlich bei den noch kommenden Rechnungen.

Vorerst seien hier, gewissermassen als Zwischenhalt, noch einige **Übungsaufgaben** formuliert, die man am besten jeweils zuerst mit *Cabri* ausprobiert:

(1) Gegeben ist ein Viereck $ABCD$. Eine Ecke, z.B. A , wird ausgewählt. Die orthogonalen Geraden zu AB in B , zu AC in C , zu AD in D bilden das sog. Antifusspunkt-dreieck von A bezüglich des Dreiecks BCD . Man zeige, dass die Umkreismittelpunkte der Antifusspunkt-dreiecke von A bez. BCD , von B bez. CDA , von C bez. DAB , von D bez. ABC ein Viereck bilden, das dem Viereck $ABCD$ perspektiv-ähnlich ist. Streckungszentrum?

(2) In einem Viereck $ABCD$ sei M_A der Mittelpunkt des Fusspunktkreises von A im Teildreieck BCD . Entsprechend M_B, M_C, M_D .

Man untersuche das Viereck $M_A M_B M_C M_D$. Sein Tangentialpunkt ist identisch mit dem Gleichseitigehyperbelzentrum des Vierecks $ABCD$.

(3) Das Gleichseitigehyperbelzentrum Z eines Vierecks $ABCD$ liegt auf dem Umkreis des Diagonaldreiecks von $ABCD$. Die Wallacegerade von Z bez. des Diagonaldreiecks (die Gerade durch die Fusspunkte der Lote von Z auf die Seiten des Diagonaldreiecks) ist parallel zur Geraden durch den Höhenschnittpunkt des Diagonaldreiecks und den Tangentialpunkt des Vierecks.

(4) Bei einem Kreissehnenviereck ist der Tangentialpunkt der Höhenschnittpunkt des durch die Diagonale gebildeten Dreiecks.

(5) Bei einem Viereck $ABCD$ mit dem Tangentialpunkt T seien O_A, O_B, O_C, O_D die Umkreismittelpunkte der Fusspunkt-dreiecke von T in den Dreiecken BCD, CDA, DAB, ABC . Man zeige, dass das Gleichseitigehyperbelzentrum von $ABCD$ der Tangentialpunkt des Vierecks $O_A O_B O_C O_D$ ist.

(6) Die Höhenschnittpunkte der vier Teildreiecke eines einer gleichseitigen Hyperbel umschriebenen Vierecks liegen auf der Polaren des Tangentialpunkts des Vierecks der Berührungspunkte bezüglich dieser Hyperbel.

10. Satz(Fig.8). M sei ein Diagonalschnittpunkt eines Vierecks $ABCD$. Die Verbindungsgeraden TM und ZM des Tangentialpunkts T und des Gleichseitigehyperbelzentrums Z von $ABCD$ mit M sind symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden der beiden in M zusammenlaufenden Gegenseiten des Vierecks.

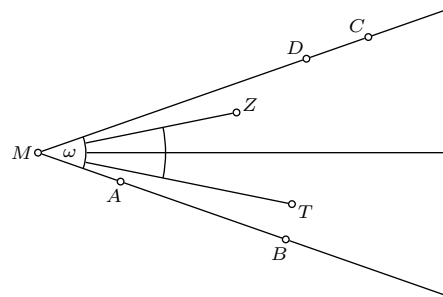


Fig. 8

Beweis. Fortsetzung der bisherigen Rechnungen. Es sei M der Schnittpunkt der Seiten AB und CD . Man vergleicht die Winkel AMT und ZMC oder man spiegelt Z an den Seiten AB, CD in Z_1, Z_2 und prüft, ob T auf der Mittelsenkrechten von $Z_1 Z_2$ liegt.

Für das Verhältnis der Strecken TM und ZM erhält man

$$\frac{\overline{TM}^2}{\overline{ZM}^2} = \frac{(1 + a^2 b^2)(1 + c^2 d^2)}{(1 + abcd)^2},$$

für den Winkel $\omega = \angle AMC$ hat man

$$\tan \omega = \frac{-ab + cd}{1 + abcd}.$$

Zusammenhang?

Es sei ω der Winkel zwischen den in M zusammenlaufenden Gegenseiten. Für die Strecken TM und ZM gilt:

$$\frac{TM}{ZM} = \sqrt{1 + \tan^2 \omega} = \frac{1 + \tan^2(\frac{\omega}{2})}{|1 - \tan^2(\frac{\omega}{2})|}.$$

Der Satz zeigt eine Möglichkeit, bei einem Viereck mit Hilfe der Diagonalepunkte das Gleichseitigehyperbelzentrum zu konstruieren, wenn der Tangentialpunkt schon konstruiert ist, oder umgekehrt.

11. Durch die Ecken eines Vierecks $ABCD$ sei ein Kegelschnitt k mit den Asymptoten f_1, f_2 gelegt (Der Anschaulichkeit wegen denken wir an eine Hyperbel, bei der man die Asymptoten "sehen" kann). Es seien A', B', C', D' die Schnittpunkte der Gegenseiten AB und CD des Vierecks mit den Asymptoten (Fig.9).

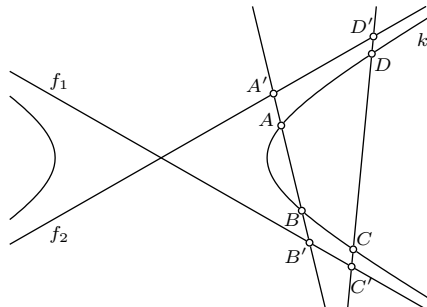


Fig. 9

Wie immer rechnen wir mit den Punkten $\mathbf{pA} = \{a, 1/a, 1\}$ etc. Es sei $\mathbf{pF1} = \{1, m, 0\}$ der Fernpunkt der Asymptote f_1 . Ansatz für die Gleichung von k :

$$k_1 t_1^2 + k_2 t_2^2 + k_3 t_3^2 + k_4 t_1 t_2 + k_5 t_2 t_3 + k_6 t_3 t_1 = 0.$$

Mit den fünf Punkten A, B, C, D, F_1 berechnet man die Koeffizienten von k .

$$k_1 = m, \quad k_2 = abcdm, \quad \dots$$

Dann schneidet man k mit der Ferngeraden, bekommt den zweiten Fernpunkt und kann f_1, f_2 und A', B', C', D' berechnen. Es zeigt sich, dass diese vier Punkte auf der gleichseitigen Hyperbel

$$y = \frac{p}{x} \quad \text{mit} \quad p = \frac{-m(a + b + abcm + abdm)(c + d + acdm + bcdm)}{(abcdm^2 - 1)^2}$$

liegen, dass also das Viereck $A'B'C'D'$ dasselbe Gleichseitigehyperbelzentrum hat wie das Viereck $ABCD$, nämlich den Koordinatennullpunkt. Ferner kann man nachweisen, dass auch der Tangentialpunkt von $A'B'C'D'$ identisch ist mit dem Tangentialpunkt von $ABCD$.

Satz. Wird ein Kegelschnitt k mit zwei Geraden geschnitten, so hat das Viereck der Schnittpunkte denselben Tangentialpunkt und dasselbe Gleichseitigehyperbelzentrum wie das Viereck der Schnittpunkte der beiden Geraden mit den Asymptoten von k .

Aus diesem Satz folgt die Aussage (2) der Einleitung, denn wenn ein Kegelschnitt vom Zentrum aus gestreckt wird, verändern sich die Asymptoten nicht.

12. Aus 10 und 11 folgt der

Satz. Es seien A, B, C, D vier Punkte eines Kegelschnitts k mit dem Zentrum M . Für den Tangentialpunkt T und das Gleichseitigehyperbelzentrum Z des Vierecks $ABCD$ gilt:

- Die Geraden TM und ZM sind symmetrisch bezüglich der Achsen von k .
- Wie die Strecken TM und ZM sich zueinander verhalten, ist in der Fig.10 angegeben.

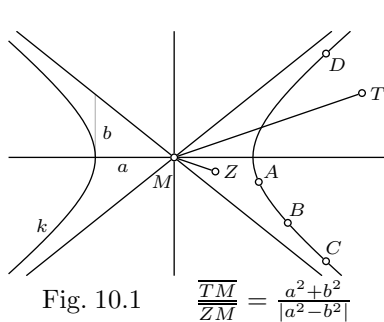


Fig. 10.1

$$\frac{\overline{TM}}{\overline{ZM}} = \frac{a^2+b^2}{|a^2-b^2|}$$

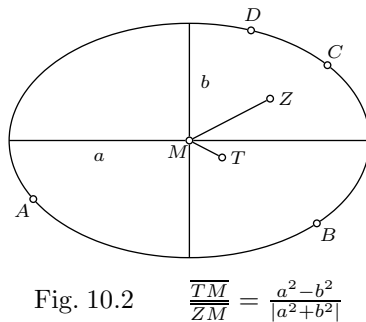


Fig. 10.2

$$\frac{\overline{TM}}{\overline{ZM}} = \frac{a^2-b^2}{|a^2+b^2|}$$

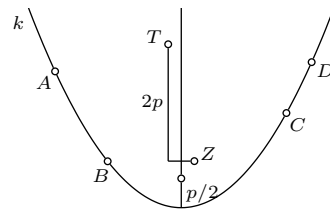


Fig. 10.3

Den ausgearteten Fall eines Geradenpaares hat 10 gezeigt.

13. Die Aussage (2) der Einleitung kann verallgemeinert werden. Es gilt der

Satz(Fig.11). *Der Tangentialpunkt und das Gleichseitighyperbelzentrum des Vierecks, gebildet durch die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, ändern sich nicht, wenn die Kegelschnitte von ihren Zentren aus beliebig gestreckt werden.*

Beweis. Wenn man bei einem Kegelschnitt k mit der Gleichung

$$q_1 t_1^2 + q_2 t_2^2 + q_3 t_3^2 + q_4 t_1 t_2 + q_5 t_2 t_3 + q_6 t_3 t_1 = 0$$

in unserem Koordinatensystem das Zentrum und die Fernpunkte berechnet, stellt man fest, dass für diese Punkte der Koeffizient q_3 keine Rolle spielt. Eine Änderung von q_3 bedeutet eine Streckung des Kegelschnitts von seinem Zentrum aus.

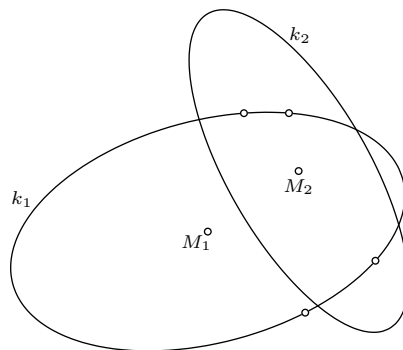


Fig. 11

Nun seien

$$\begin{aligned} a_1 t_1^2 + a_2 t_2^2 + a_3 t_3^2 + a_4 t_1 t_2 + a_5 t_2 t_3 + a_6 t_3 t_1 &= 0 \\ b_1 t_1^2 + b_2 t_2^2 + b_3 t_3^2 + b_4 t_1 t_2 + b_5 t_2 t_3 + b_6 t_3 t_1 &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der beiden Kegelschnitte k_1 und k_2 . Das Gleichseitighyperbelzentrum des Schnittvierecks von k_1 und k_2 bekommt man, wenn man unter den Kegelschnitten des durch k_1 und k_2 bestimmten Büschels die gleichseitige Hyperbel h herausucht und deren Zentrum berechnet.

$$h: (a_1 + \lambda b_1) t_1^2 + (a_2 + \lambda b_2) t_2^2 + \dots = 0$$

Einsetzen von $\{1, m, 0\}$. Es seien $\{1, m_1, 0\}$ und $\{1, m_2, 0\}$ die beiden Fernpunkte. Gleichseitig heisst $m_1 m_2 = -1$. Unter Verwendung des Satzes von *Vieta* ergibt sich

$$\lambda = -(a_1 + a_2)/(b_1 + b_2)$$

Es zeigt sich, dass das Zentrum von h , der Pol der Ferngeraden $\{0, 0, 1\}$, von a_3 und b_3 unabhängig ist, dass mit beliebig gestreckten Kegelschnitten dasselbe Gleichseitighyperbelzentrum herauskommt.

Und wegen Satz 12 ist dann auch der Tangentialpunkt von Streckungen unbeeinflusst.

14. Noch einen Schritt weiter.

Ein Kegelschnitt l eines durch zwei Kegelschnitte k_1, k_2 festgelegten Büschels wird mit einem Kegelschnitt k geschnitten. Was lässt sich über das Gleichseitighyperbelzentrum Z des Schnittpunktvierecks von l und k sagen?

l und k legen auch wieder ein Büschel fest. Gesucht werden muss das Zentrum der gleichseitigen Hyperbel h dieses Büschels.

$$h = l + \lambda k = (k_1 + \mu k_2) + \lambda k.$$

Man hält μ fest und berechnet wie bei 13 den Wert λ , für den h gleichseitig wird.

Die Koordinaten von Z werden dann alle quadratisch in μ . Das heisst, dass sich Z auf einem Kegelschnitt bewegt, wenn μ variiert.

Auch die Punkte $\{1, I, 0\}$ und $\{1, -I, 0\}$ gehören zu diesem Kegelschnitt (Man kann zeigen, dass für die μ -Werte, welche die dritte Koordinate von Z verschwinden lassen, die Summe der Quadrate der beiden ersten auch verschwindet). Somit bewegt sich Z auf einem Kreis, und wegen Satz 12 auch T .

Satz. Wird ein Kegelschnittbüschel mit einem Kegelschnitt k geschnitten, so liegen die Tangentialpunkte und die Gleichseitighyperbelzentren der Vierecke, gebildet durch die Schnittpunkte von k mit jeweils einem Kegelschnitt des Büschels, auf zwei allein durch das Büschel und k festgelegten Kreisen.

Diese T - und Z -Kreise können ausgeartet sein:

- Beim Büschel aller Parabeln mit vorgegebener Achsenrichtung, die durch zwei feste Punkte gehen, gibt es Geraden.
- Bei einem Büschel, aufgespannt durch zwei perspektiv-ähnliche Kegelschnitte mit gemeinsamem Zentrum, sind es Punkte. Nimmt man in diesem Fall für k ein Geradenpaar, so ist es wieder die Situation (2) der Einleitung.

15. Man prüfe mit Cabri auch die folgende Behauptung:

Gegeben sind ein Dreieck ABC , ein Punkt D und ein Kegelschnitt k . Das Kegelschnittbüschel mit den Büschelpunkten A, B, C, D bestimmt zusammen mit k nach Satz 14 einen T -Kreis und einen Z -Kreis. Hält man A, B, C und k fest und variiert man einzig D , so ändern sich diese Kreise. Merkwürdigerweise haben aber alle diese T -Kreise einen allein durch das Dreieck ABC und den Kegelschnitt k festgelegten Punkt gemeinsam. Ebenso, wegen 12, die Z -Kreise.

Grundsätzlich ist zu sagen, dass auch bei Computerunterstützung die Arbeit immer günstig aufgeteilt werden muss, dass man jeweils den eleganten Weg, die Rechnung mit möglichst einfachen Koordinatenausdrücken suchen muss. Die Terme werden sonst zu umfangreich als dass sie vom Computer in vernünftiger Zeit verarbeitet werden können.

Wenn eine algebraische Berechnung nicht gelingt, hat man natürlich stets die Möglichkeit, eine Vermutung wenigstens numerisch zu erhärten.

16. Eine Anwendung zu 14.

Satz(Fig.12). Wird ein Kegelschnitt k von einer Geraden g und einem Geradenbüschel geschnitten, so liegen die Tangentialpunkte der Vierecke, die durch g und jeweils eine Büschelgerade auf k herausgeschnitten werden, auf einem Kreis.

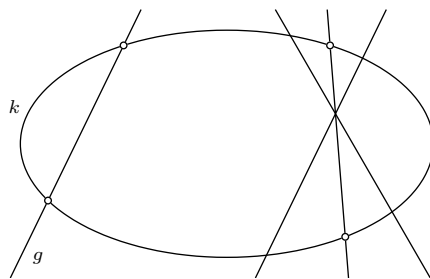


Fig. 12

Beweis. Man nehme zwei Geraden f_1, f_2 des Büschels. Die (ausgearteten) Kegelschnitte $k_1 = g \cup f_1$ und $k_2 = g \cup f_2$ bestimmen ein Kegelschnittbüschel, dessen Kegelschnitte aus g und jeweils einer Geraden des Geradenbüschels bestehen. Dieses Kegelschnittbüschel wird mit k geschnitten.

Auch hier: Wenn z.B. k eine gleichseitige Hyperbel ist oder wenn das Geradenbüschel eine Parallelschar ist, gibt es keinen Kreis, sondern eine Gerade.

17. Noch eine Anwendung zu **14**: Die Aussage (3) der Einleitung.

Beweis. x wird zuerst festgehalten. k_1 sei irgend eine Hyperbel, die durch A und B geht und q als Asymptote hat, k_2 ein Kegelschnitt durch A und B , der q in Q berührt. Die Kegelschnitte des durch k_1 und k_2 festgelegten Büschels gehen durch A und B und erzeugen auf q mit ihren Schnittpunkten C und D bekanntlich eine Involution, deren Fixpunkte Q und der Fernpunkt von q sind. Q ist daher die Mitte von CD . Geschnitten wird das Kegelschnittbüschel mit dem Geradenpaar $p \cup q$. Bei festem x und variablem y bewegt sich der Tangentialpunkt T also auf einem Kreis.

Dieser Kreis geht durch drei besondere Punkte, wie man mit *Cabri* feststellt: Durch den Schnittpunkt U von p mit der Orthogonalen zu q durch Q , durch den Schnittpunkt V von q mit der Orthogonalen zu p durch P und durch den Schnittpunkt W dieser beiden Orthogonalen. Eine ergänzende Rechnung mit $P(1/0)$, $Q(q_1/q_2)$ und dem Schnittpunkt von p und q als Koordinatennullpunkt bestätigt dies. Da U , V , W von x unabhängig sind, ist die Aussage (3) damit bewiesen.

18. Je weiter man in dieses Gebiet vordringt, umso beeindruckender und interessanter wird alles. Es tun sich immer wieder neue Zusammenhänge auf.

Zum Schluss seien hier noch drei Anregungen gemacht ohne weiteren Kommentar:

(1) Gegeben sind ein Kegelschnitt k , ein Punkt P und ein Winkel ϕ . Ein Geradenpaar, das sich im Punkt P schneidet und den Winkel ϕ einschliesst, wird um P herumgedreht (Fig.13). Was lässt sich über den Tangentialpunkt des Vierecks der Schnittpunkte des Geradenpaars mit k sagen?

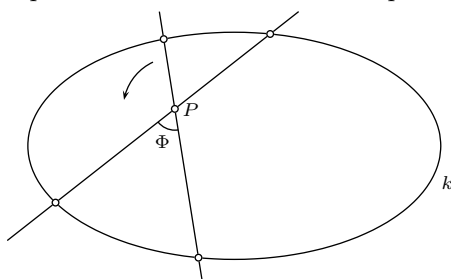


Fig. 13

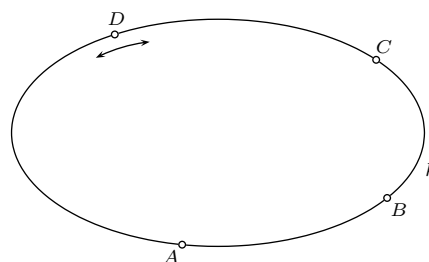


Fig. 14

(2) Auf einem Kegelschnitt k liegen vier Punkte A, B, C, D (Fig.14). Man zeige, dass sich der Tangentialpunkt des Vierecks $ABCD$ auf einem Kreis bewegt, wenn die Punkte A, B, C festgehalten und der Punkt D auf k bewegt wird.

Welche Positionen nimmt der Mittelpunkt dieses Kreises ein, wenn man C auf k auch noch verändert?

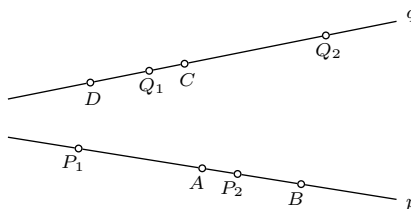


Fig. 15

(3) Verallgemeinerung der Aussage (3) der Einleitung (Fig.15). Auf einer Geraden p sind zwei Punkte P_1, P_2 und auf einer Geraden q zwei Punkte Q_1, Q_2 gegeben. A ist ein variabler Punkt auf p , C ein variabler Punkt auf q , B der zu A harmonische Punkt bezüglich der Grundpunkte P_1, P_2 und D der zu C harmonische bezüglich der Grundpunkte Q_1, Q_2 . Wo befindet sich der Tangentialpunkt des Vierecks $ABCD$?

Literatur

- [1] Johnson R. A.: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications Inc., NewYork 1960.
- [2] Lange J.: Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Verlag H. W. Müller, Berlin 1908.
- [3] Stärk R.: Problem P1024. PM Praxis der Mathematik - vereinigt mit DdM. Aulis Verlag, Köln.
PM 6/39(1997), **PM** /40(1998).
- [4] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1988.
- [5] Laborde J.- M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.

Anschrift der Verfasser:

Daniel Baumgartner	Roland Stärk
Furkastrasse 15	Im Santenbühl
8048 Zürich	CH-8234 Stetten
bg "ät" geometria.ch	roland.staerk "ät" sunrise.ch