

DIE ANSETZABBILDUNG

Ein Beitrag zur Theorie der Zirkularkurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt

Roland Stärk, 2015

Publiziert auf www.geometria.ch

1. In der Figur 1 ist eine in der Elementargeometrie immer wieder behandelte Figur dargestellt. An die Seiten eines Dreiecks ABC sind rundherum unter sich ähnliche gleichschenklige Dreiecke angesetzt, alle nach aussen oder alle nach innen. Das Bemerkenswerte ist, dass die Verbindungen von den Ecken A, B, C zu den gegenüberliegenden Scheiteln kopunktal sind. Dazu nur einige Stichworte: Satz von NAPOLEON, FERMAT-Punkt, KIEPERT-Hyperbel.

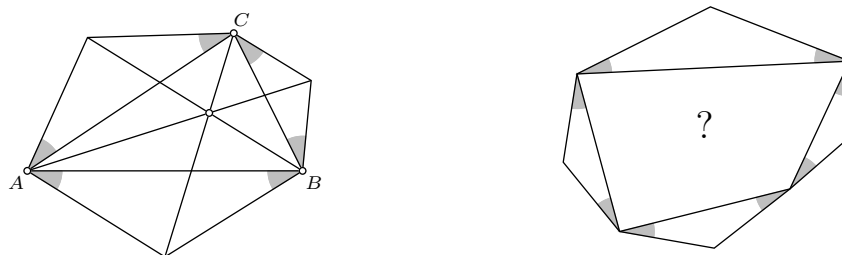


Fig. 1

Hier sei die Frage gestellt, ob bei einem Viereck etwas Vergleichbares zu finden ist? Auf den ersten Blick: nein. Über das Scheitelpunktviereck lässt sich nicht viel sagen, ausser dass sein Schwerpunkt festsetzt, wenn die angesetzten Dreiecke verändert werden; dies auch, wenn sie nicht gleichschenklige, einfach alle nur gleichsinnig ähnlich sind.

Das Wort "Viereck" ist hier aber nicht ganz korrekt. Man sollte, wie in der fortgeschrittenen Elementargeometrie üblich, unter Viereck jeweils *allgemeines* Viereck verstehen. Hier geht es, genau genommen, um einen "geschlossenen Vierstreckenzug".

2. Wir beginnen mit der Figur 2. Gegeben sind eine Strecke X_1X_2 und ein geschlossener (orientierter) Vierstreckenzug $ABCD$. P sei irgend ein Punkt. Das Dreieck X_1X_2P wird dem Streckenzug entlang an die Strecken passend angesetzt. "Passend ansetzen" eines Dreiecks X_1X_2P an eine Strecke AB , meint: Mit AB als Seite ein dem Dreieck X_1X_2P gleichsinnig ähnliches Dreieck zeichnen, wobei A der Ecke X_1 und B der Ecke X_2 (die Reihenfolge ist wichtig) entsprechen soll.

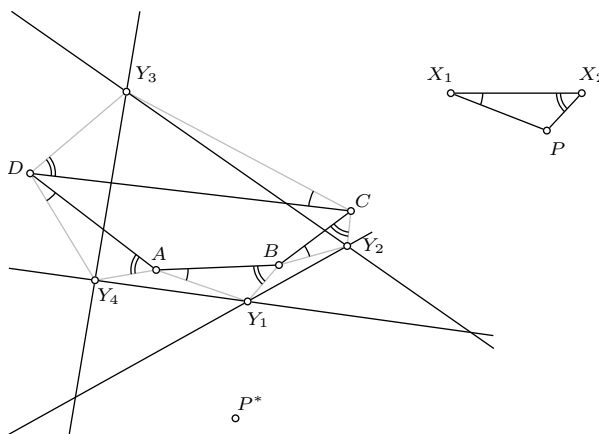


Fig. 2

Die freien Ecken Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 bilden in der durch den Ausgangsstreckenzug gegebenen Reihenfolge auch einen Vierstreckenzug $Y_1Y_2Y_3Y_4Y_1$. Die Geraden, auf denen die Strecken liegen, bilden ein Vierseit. Da denkt man natürlich sofort an den wichtigsten Punkt eines Vierseits, an seinen STEINER-Punkt (den gemeinsamen Punkt der Umkreise aller vier Teildreiseite). Dieser STEINER-Punkt sei hier mit P^* bezeichnet.

Und schon ist die interessante Abbildung $:P \mapsto P^*$ definiert. Wir nennen sie die *Ansetzabbildung mit der Basis X_1X_2 beim geschlossenen Vierstreckenzug $ABCD$* .

Mit CABRI [1] lässt sich schnell ein Makro machen, das diese Ansetzabbildung ausführt. Und geometrische Örter von P^* , die zu Kurven gehören, auf denen P sich bewegen lässt, können dann automatisch gezeichnet werden.

Bewegt P sich auf der Mittelsenkrechten f von X_1X_2 (Figur 3) – wenn also gleichschenklige Dreiecke angesetzt werden –, so bewegt P^* sich nicht auf einer komplizierten Kurve, sondern auf einer Geraden. Dies ist das erste schöne Resultat.

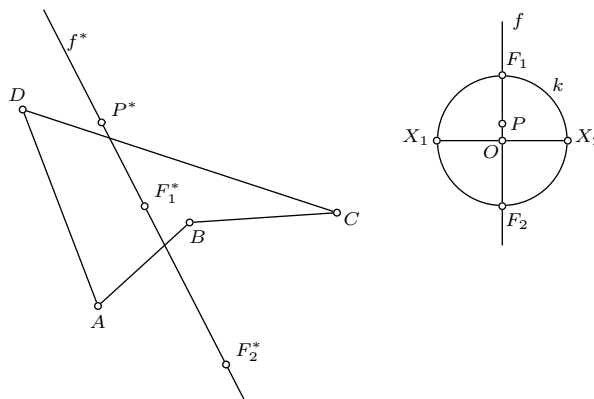


Fig. 3

Zwei Positionen von P sind besonders wichtig: Die Schnittpunkte F_1, F_2 mit dem Thaleskreis über X_1X_2 – d.h. wenn rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke angesetzt werden. Wir nennen ihre Bilder F_1^*, F_2^* die Brennpunkte des geschlossenen Viereckenzuges $ABCD A$.

Der Mittelpunkt der Strecke $F_1^*F_2^*$ ist übrigens der STEINERpunkt des zum Streckenzug $ABCD A$ gehörenden Vierseits.

Liegt P auf dem Thaleskreis k über X_1X_2 , so befindet sich P^* auch auf der Geraden durch die Brennpunkte. Genau betrachtet: Das Bild k^* von k ist die Strecke $F_1^*F_2^*$, das Bild f^* von f sind die Punkte ausserhalb der Brennpunkte.

Einige weitere Kurven:

- (2.1) Wenn P sich auf einer durch den Mittelpunkt O von X_1X_2 gehenden Geraden g bewegt, beschreibt P^* eine Hyperbel mit den Brennpunkten F_1^*, F_2^* , daher die Bezeichnung.
- (2.2) Das Bild irgend eines Kreises um O ist eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1^*, F_2^* .
- (2.3) Das Bild des Kreises um F_1 oder um F_2 , der durch X_1, X_2 geht, ist eine Lemniskate.
- (2.4) Spiegelt man bei (2.1) die Gerade g , bevor man abbildet, zuerst noch an f , so erhält man dieselbe Hyperbel.

Dies führt zur Erkenntnis, dass bei der Ansetzabbildung ein Bildpunkt jeweils nicht nur einen einzigen Urbildpunkt besitzt. Es gilt der

Satz: Ein Punkt P und der Punkt, den man erhält, wenn P an der Mittelsenkrechten f der Basisstrecke X_1X_2 gespiegelt und anschliessend am Thaleskreis k über X_1X_2 invertiert wird (oder umgekehrt), haben dasselbe Bild P^* .

Beweis analytisch. Näheres darüber und zu weiteren Beweisen, folgt später im Abschnitt 6.

3. Die Frage, die hier am meisten interessieren soll: Was wird aus einer Geraden in allgemeiner Lage?

Vorher aber noch eine Ergänzung zur eben erwähnten Spiegelinversion.

Satz (Figur 4): Es sei P' der Punkt, in den P bei der Spiegelinversion an f und k übergeht, und $\overline{P}$ sei die Mitte der Strecke PP' . Die Gerade PP' ist die innere Winkelhalbierende des Dreiecks $F_1\overline{P}F_2$, bei $\overline{P}$. Die Punkte P, P', F_1, F_2 sind konzyklisch, der Schnittpunkt der äusseren Winkelhalbierenden mit der Basisgeraden X_1X_2 ist der Mittelpunkt ihres Kreises.

(Nebenbei noch: $\overline{P}$ liegt auch auf dem FEUERBACH- oder Neunpunktekreis des Dreiecks X_1X_2P . Und der LEMOINEpunkt des Seitenmittendreiecks von X_1X_2P ist kollinear mit O und $\overline{P}$.)



Hauptsatz: Die Ansatzabbildung mit der Basis X_1X_2 beim geschlossenen Streckenzug $ABCD A$ bildet eine Gerade g (die nicht durch den Mittelpunkt O der Basisstrecke geht) und ihren spiegelinversen Kreis g' (Spiegelung an der Mittelsenkrechten f von X_1X_2 und Inversion am Thaleskreis k über X_1X_2) in eine Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung g^* mit Doppelpunkt ab. (Figur 5)

- (3.1) Es sei J der Schnittpunkt von g mit f und m sei die Mittelsenkrechte von JO . Der Schnittpunkt H von g und m , und damit auch sein spiegelinverser Punkt H' werden abgebildet in den Hauptpunkt H^* von g^* .
- (3.2) Die Schnittpunkte $G_1, G_2 \equiv G'_1$ von m mit k gehen über in einen Punkt der Asymptote von g^* , in den Punkt, welcher auf der Strecke $F_1^*F_2^*$ liegt.
- (3.3) Die Schnittpunkte D, D' von g mit g' gehen über in den Doppelpunkt D^* von g^* . (Wie man den Doppelpunkt von g^* bekommt, wenn g und g' sich nicht reell schneiden, wird im Abschnitt 7 erläutert).
- (3.4) Wenn g und g' sich berühren, entartet der Doppelpunkt zu einer Spitze.



Wichtige Erkenntnis: Abgebildet in die Zirkularkurve g^* wird hier nicht bloss die Gerade g , sondern ebenfalls eine Zirkularkurve, nämlich die zerfallende Kurve $g \cup g'$.

Wie konstruiert man die Tangente an g^* im Bildpunkt P^* eines Punktes P von g ? Es gilt der

Satz: Drei kollineare Punkte Y_1, Y_2, Y_3 von $g \cup g'$ haben kollineare Bilder Y_1^*, Y_2^*, Y_3^* .

Man nimmt die Tangente im Urbildpunkt zu Hilfe, natürlich im Punkt, der auf dem Kreis g' liegt. Es sei R ihr Schnittpunkt mit g . R^* gehört dann zur gesuchten Tangente.

Auf diese Weise lässt sich auch der Steinerpunkt S^* von g^* konstruieren. Das ist der Berührungspunkt der vom Hauptpunkt H^* an g^* gelegten Tangente. Man nimmt das Urbild von H^* (diesmal den Punkt auf g) und bekommt S mit der Tangente an g' . (O ist das Urbild des reellen Fernpunkts von g^*).

4. Es lassen sich nun Eigenschaften der Zirkularkurve g^* – es ist allerdings nur eine Zirkularkurve mit Doppelpunkt – von ihrem Urbild $g \cup g'$ her mit Hilfe von CABRI elegant untersuchen.

Ein Beispiel: Durch irgend einen Punkt von g^* werden zwei Geraden gelegt. Sie schneiden g^* noch in je zwei weiteren Punkten. Man möchte experimentell abklären, wie sich der Tangentialpunkt [2] des durch diese vier Punkte gebildeten Vierecks bewegt, wenn eine der Geraden festgehalten, die andere um den Ausgangspunkt gedreht wird.

Der heiklen Aufgabe, die Schnittpunkte bei g^* zu konstruieren, aus dem Wege gehend, zeichnet man einfach eine solche Zweigeradenfigur bei $g \cup g'$ ein, bildet die vier Punkte mit der Ansatzabbildung ab, konstruiert bei den abgebildeten Punkten den Tangentialpunkt und setzt die Figur bei $g \cup g'$ in Bewegung. Wie bewegt er sich?

5. Die Methode der Tangentenkonstruktion oben versagt beim Doppelpunkt von g^* . Dann kann man aber die Tatsache zu Hilfe nehmen, dass eine Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt bei der Inversion an einem Kreis um den Doppelpunkt in einen Kegelschnitt übergeht, dessen Asymptoten parallel sind zu den Doppelpunkttangenten.

Nebenbei noch. Beim Dreieck, gebildet durch den Doppelpunkt D^* und die Schnittpunkte T_1, T_2 der Doppelpunkttangenten mit der Asymptote von g^* , gilt: Die Transversale von D^* aus, welche harmonisch ist zu D^*H^* bezüglich der Doppelpunkttangenten, läuft durch den LEMOINE-Punkt des Dreiecks.

6. Eine grundsätzliche Frage: Wie wichtig für die Form eines Bildes ist bei diesem Ansatzprozess die Form des Vierstreckenzuges $ABCD$?

Mit Überraschung stellt man fest: Überhaupt nicht!

Wir führen die Ansatzabbildung bei zwei verschiedenen Vierstreckenzügen aus (Figur 6). P^* sei das Bild von P bez. $A_1B_1C_1D_1A_1$, P^{**} sei dasjenige bez. $A_2B_2C_2D_2A_2$.

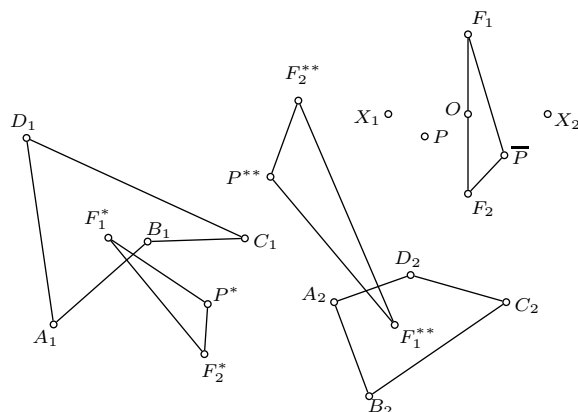


Fig. 6

Satz: Die Dreiecke $F_1^*F_2^*P^*$ und $F_1^{**}F_2^{**}P^{**}$ sind gleichsinnig ähnlich.. Und zwar sind sie ähnlich dem Dreieck $F_1F_2\bar{P}$, wobei $\bar{P}$ der Mittelpunkt zwischen P und dem zu P spiegelinversen Punkt P' bez. f und k ist (Figur 4).

Gewissermassen an Ort und Stelle, bei X_1X_2 , wird sichtbar, was sich bei jedem Streckenzug $ABCD$ abspielt. Und es ist möglich, einen Punkt P^* zurückabzubilden. Man setzt das Dreieck $F_1^*F_2^*P^*$ an die Strecke F_1F_2 passend an, bekommt den Punkt $\bar{P}$ und kann zu P und P' gelangen, wie in Abschnitt 3 beschrieben.

Analytischer Beweis des Satzes: Mit dem Streckenzug $A(-1, 0, 1)$, $B(1, 0, 1)$, $C(u, v, 1)$, $D(p, q, 1)$ und der Basisstrecke $X_1(-1, 0, 1)$, $X_2(1, 0, 1)$ berechnet man zuerst F_1^* und F_2^* und zeigt dann für einen Punkt $P(m, n, 1)$, dass die Winkel $F_1^*F_2^*P^*$ und $F_2^*F_1^*P^*$ unabhängig sind von u, v, p, q . Der Punkt $\bar{P}$ hat die Koordinaten $(m(m^2 + n^2 - 1), n(m^2 + n^2 + 1), 2(m^2 + n^2))$.

Alles Weitere liefert ab jetzt die Abbildung $: P \mapsto \bar{P}$. Auch sie soll *Ansetzabbildung* heissen (beim Inversionskreis k und dem Spiegelungsdurchmesser f).

7. Das Bild $\bar{g}$ einer Geraden g bei dieser Ansetzabbildung $: P \mapsto \bar{P}$ beim Kreis k und dem Durchmesser f sei hier nochmals mit den wichtigen Merkmalen dargestellt (Figur 7).

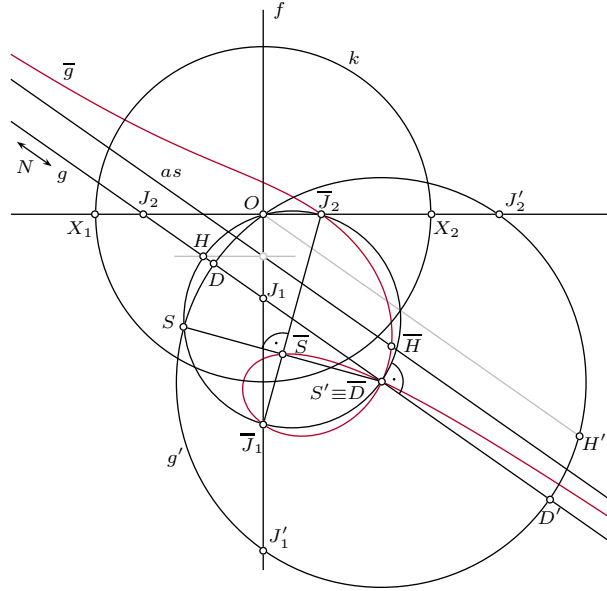


Fig. 7

- (7.1) Die Asymptote as von $\bar{g}$ ist die Mittelparallele von g und dem Mittelpunkt O von k .
- (7.2) Die Punkte $\bar{J}_1, \bar{J}_2$, die Bilder der Schnittpunkte von g mit f und mit der Orthogonalen zu f durch O , sind die Berührungspunkte der Tangenten vom Fernpunkt N von g (und $\bar{g}$) aus an $\bar{g}$.
- (7.3) Der Schnittpunkt H von g mit der Mittelsenkrechten von OJ_1 wird abgebildet in den Hauptpunkt von g . Der spiegelinverse Punkt H' von H ist der zweite Schnittpunkt der Parallelen zu g durch O mit dem spiegelinversen Kreis g' von g .
- (7.4) Die Schnittpunkte D, D' von g und g' werden abgebildet in den Doppelpunkt $\bar{D}$ von $\bar{g}$. Auch wenn g und g' sich nicht reell schneiden, ist der Fusspunkt des Lotes vom Mittelpunkt von g' auf g der Doppelpunkt von $\bar{g}$.
- (7.5) Der zweite Schnittpunkt S (neben O) der Polaren von H bez. g' mit g' wird abgebildet in den Steinerpunkt $\bar{S}$ von $\bar{g}$. $\bar{S}$ ist der Lotfusspunkt von S auf die Gerade $\bar{J}_1\bar{J}_2$. Der spiegelinverse Punkt S' ist identisch mit dem Doppelpunkt $\bar{D}$.

Satz: Die Punkte $H, O, S, S' = \bar{D}$ liegen auf dem Thaleskreis über $\bar{J}_1\bar{J}_2$.

Nachtrag: Bei der Ansetzabbildung $: P \mapsto P^*$ mit der Basisstrecke X_1X_2 beim Vierstreckenzug $ABCD$ erhält man, wenn eine Gerade g ihren spiegelinversen Kreis g' nicht schneidet, den Doppelpunkt des Bildes g^* folgendermassen: Man konstruiert den Lotfusspunkt D vom Mittelpunkt von g' auf g und setzt dann das Dreieck F_1F_2D an die Strecke $F_1^*F_2^*$ passend an.

8. Zum Schluss noch einige Fragen und Antworten.

(1) k sei der Einheitskreis um den Koordinatennullpunkt $O(0, 0, 1)$, und f die Koordinatenachse $(1, 0, 0)$. Wo liegen die Punkte (t_1, t_2, t_3) , die mit der Ansetzabbildung bei k und f in Punkte einer Geraden (g_1, g_2, g_3) abgebildet werden?

Auf der Kurve

$$g_1t_1^3 + g_2t_1^2t_2 + g_1t_1t_2^2 + g_2t_2^3 + 2g_3t_1^2t_3 + 2g_3t_2^2t_3 - g_1t_1t_3^2 + g_2t_2t_3^2 = 0.$$

Dies ist eine Fokalkurve. O ist ihr singulärer Brennpunkt.

(2) Lässt sich jede Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt mittels einer Ansetzabbildung als Bild einer Geraden g erfassen? Wie kommt man zum Inversionskreis k und dem Spiegelungsdurchmesser f und zur Geraden g ?

Wenn von der Zirkularkurve die folgenden Elemente bekannt sind: der Hauptpunkt $\overline{H}$, der Steinerpunkt $\overline{S}$, die Asymptote as und die beiden Punkte $\overline{J}_1, \overline{J}_2$, deren Tangenten parallel zu as verlaufen, dann lassen sich k, f und g (wie in Figur 7 ersichtlich – man muss allerdings wissen, dass die dort erwähnten Eigenschaften bei jeder Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt gelten) folgendermassen konstruieren:

1. Mit dem Thaleskreis kr über $\overline{J}_1\overline{J}_2$ beginnen.
2. kr schneiden mit der Orthogonalen durch $\overline{S}$ zur Geraden $\overline{J}_1\overline{J}_2$. Einer der Schnittpunkte S, S' ist der Doppelpunkt $\overline{D}$.
3. g ist die Parallele zu as durch $\overline{D}$. Der zweite Schnittpunkt von g mit kr ist H .
4. Den Kreis um H , der durch den anderen der Punkte S, S' geht, schneiden mit kr . So entsteht O (falls O nicht auf der Spiegelgeraden von g an as liegt, hat man den falschen Punkt als $\overline{D}$ genommen).
5. Die innere Winkelhalbierende durch O des Dreiecks SOS' ist f . Der Radius von k beträgt $\sqrt{OS \cdot OS'}$.

(3) Gibt es zu einem Kreis k und einer Geraden f durch seinen Mittelpunkt O nebst den ausgearteten Zirkularkurven $g \cup g'$, gebildet durch eine Gerade g und ihren bez. k, f spiegelinversen Kreis g' noch andere Zirkularkurven 3^{ter} Ordnung, welche mit der Ansetzabbildung $: P \mapsto \overline{P}$ in Zirkularkurven 3^{ter} Ordnung übergehen?

Ja, jede Zirkularkurve 3^{ter} Ordnung $\mathcal{Z}$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt: O ist ein Steinerpunkt von $\mathcal{Z}$, f ist die Winkelhalbierende in O des Steinerdreiecks von $\mathcal{Z}$, und der Radius von k ist das geometrische Mittel der bei O zusammenstossenden Steinerdreiecksseiten.

Das Bild $\overline{\mathcal{Z}}$ von $\mathcal{Z}$ hat dann aber keinen Doppelpunkt wie im ausgearteten Fall $g \cup g'$.

Wenn O zusätzlich der singuläre Brennpunkt von $\mathcal{Z}$ ist, $\mathcal{Z}$ also eine Fokalkurve, dann ist $\overline{\mathcal{Z}}$ eine Gerade (siehe (1)).

(4) Zwei Geraden g_1, g_2 werden ansetzabgebildet bei k und f . Wieviele Schnittpunkte sind bei ihren Bildern $\overline{g}_1, \overline{g}_2$ zu sehen? Man betrachte eine Disposition, wo die sechs gemeinsamen Punkte von $g_1 \cup g'_1$ und $g_2 \cup g'_2$ (neben O und den Kreisfrenpunkten) reell sind.

Die Antwort lautet: $\overline{g}_1$ und $\overline{g}_2$ haben drei gemeinsame Punkte, die interessanterweise kollinear sind. Die erwähnten sechs Schnittpunkte von $g_1 \cup g'_1$ und $g_2 \cup g'_2$ bilden ein Vierseit. Gegenecken dieses Vierseits sind spiegelinvers bez. f, k . Jedes Gegeneckenpaar liefert einen der Schnittpunkte von $\overline{g}_1$ und $\overline{g}_2$.

Die Gerade durch die drei Schnittpunkte von $\overline{g}_1$ und $\overline{g}_2$ soll *Dreipunktgerade* des Zweiseits g_1g_2 heissen. Man betrachte nun noch ein Dreiseit $g_1g_2g_3$. Zu jedem seiner Teilzweiseite gehört eine solche Dreipunktgerade. Verblüffend ist die Tatsache, dass diese drei Dreipunktgeraden kopunktal sind. Es sei $\overline{Z}$ der gemeinsame Punkt und Z, Z' dessen Urbilder. Die zweite Überraschung: Es existiert ein Kegelschnitt mit dem Zentrum $\overline{Z}$ und den Brennpunkten Z und Z' , welcher alle drei Geraden g_1, g_2, g_3 berührt.

Literatur

- [1] Laborde J.– M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
- [2] Stärk R./Baumgartner D.: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks.
Praxis der Mathematik, PM44 (2002) 19-27. Aulis Verlag, Köln.

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH-8234 Stetten
roland.staerk@sunrise.ch