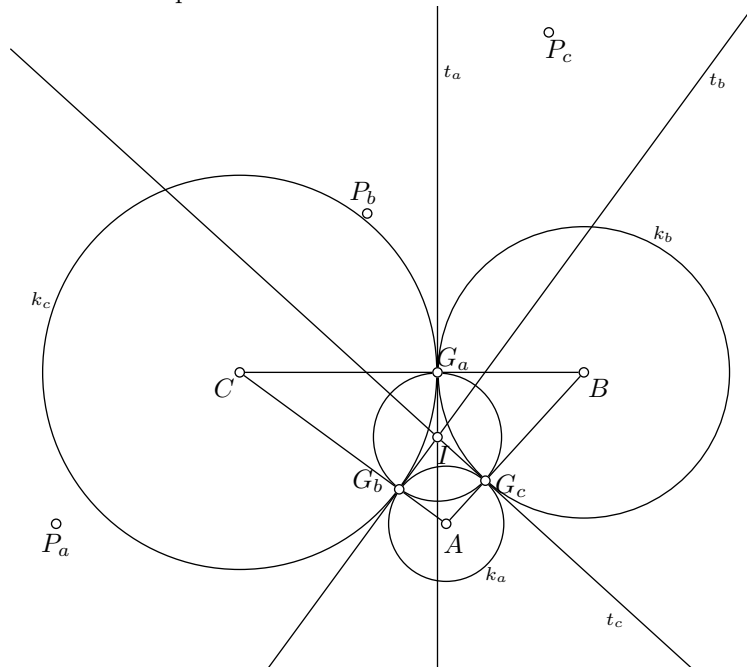


ZU EINEM SATZ ÜBER DREI SICH BERÜHRENDE KREISE

Daniel Baumgartner, 2008

Publiziert auf www.geometria.ch

1. Wir betrachten drei Kreise k_a, k_b, k_c mit den Zentren A, B, C . Jeder Kreis berührt beide anderen (Figur 1). G_a sei der Berührungspunkt der Kreise k_b und k_c , und t_a sei die gemeinsame Tangente in G_a . Ebenso G_b, t_b und G_c, t_c . Zunächst ist klar, dass G_a, G_b, G_c die Inkreisberührungspunkte des Dreiecks ABC sind und t_a, t_b, t_c im Inkreismittelpunkt I zusammenlaufen.



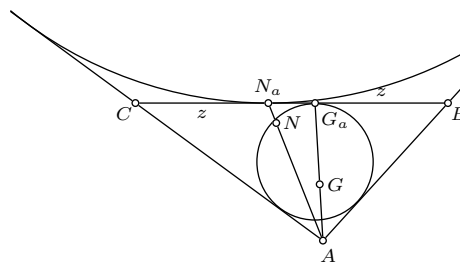
Figur 1

Es soll der folgende Satz gezeigt werden¹

Satz. Seien P_a, P_b, P_c die Pole von t_a, t_b, t_c bezüglich der Kreise k_a, k_b, k_c . Dann sind P_a, P_b, P_c kollinear.

2. Vorbetrachtung. Die Transversalen, die die Ecken des Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten des Inkreises verbinden, schneiden sich in einem Punkt, dem Gergonnepunkt G . Und die Transversalen von den Ecken zu den gegenüberliegenden Ankreisberührungspunkten gehen auch durch einen Punkt, den Nagelpunkt N des Dreiecks.

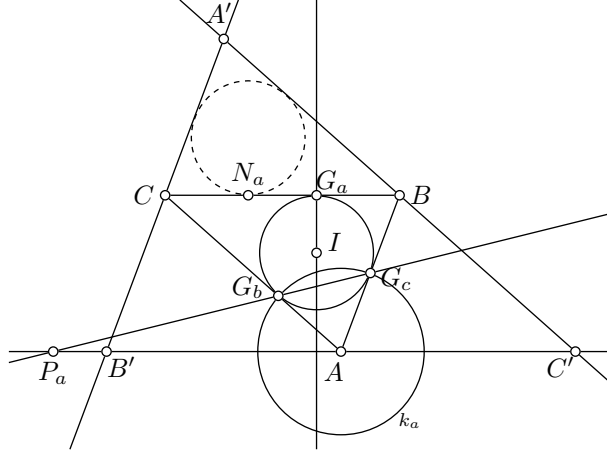
Die Endpunkte der Transversalen sind von den benachbarten Ecken gleichweit entfernt: $G_aB = N_aC = s - b$, $G_bC = N_bA = s - c$, $G_cA = N_cB = s - a$, wobei s der halbe Dreiecksumfang ist. In der Figur 2 ist $z = s - b$.



Figur 2

¹IMO-Aufgabe [...Jahr, Ort..]

3. Beweis von Satz 1. Durch die Ecken des Dreiecks ABC ziehen wir die Parallelen zu den Gegenseiten (Figur 3). So entsteht das Dreieck $A'B'C'$ mit den zu ABC ähnlichen Dreiecken $A'CB$, $B'AC$, $C'BA$.



Figur 3

Die Gerade G_bG_c ist die Polare des Inkreiszentrums I bezüglich k_a . Der Pol P_a von IG_a liegt somit auf G_bG_c und natürlich auch auf $B'C'$, weil IG_a orthogonal zu $B'C'$ ist. Dies bedeutet: die Punkte P_a , P_b , P_c sind die Schnittpunkte entsprechender Seiten der Dreiecke $G_aG_bG_c$ und $A'B'C'$.

Wir zeigen, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einem Punkt zusammenlaufen: Die Gerade $A'G_a$ ist eine Nageltransversale im Dreieck $A'CB$, und damit auch im Dreieck $A'B'C'$. Die Geraden $A'G_a$, $B'G_b$ und $C'G_c$ schneiden sich demnach in einem Punkt (dem Nagelpunkt N' des Dreiecks $A'B'C'$). Nach Desargues folgt daraus die Kollinearität der Punkte P_a , P_b , P_c .

□

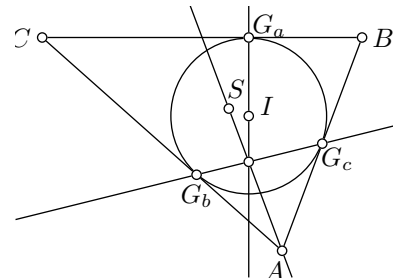
4. Die von den Punkten P_a, P_b, P_c festgelegte Gerade wollen wir die *Drei-Pole-Gerade* nennen. Im Abschnitt 3 haben wir festgestellt dass die Dreiecke $A'B'C'$ und $G_aG_bG_c$ zentralperspektiv sind, dessen Zentrum der Nagelpunkt N' ist. Bekanntlich sind in einem Dreieck der Schwerpunkt S , das Inkreiszentrum I und der Nagelpunkt N kollinear. Weil das Seitenmittendreieck ABC aus dem Dreieck $A'B'C'$ durch zentrische Streckung an S hervorgeht, liegt N' auch auf der Geraden IS des Dreiecks ABC . Diese Gerade verläuft senkrecht zur Drei-Pole-Gerade, genauer:

5. Satz. Die Drei-Pole-Gerade ist die Polare des Schwerpunkts des Dreiecks ABC bezüglich des Inkreises.

Der folgende Hilfssatz beschreibt eine geometrische Eigenschaft, die wir im Beweis dieses Satzes benötigen. Wir wollen diesen Sachverhalt hier behandeln, damit wir ihn später nicht einflechten müssen.

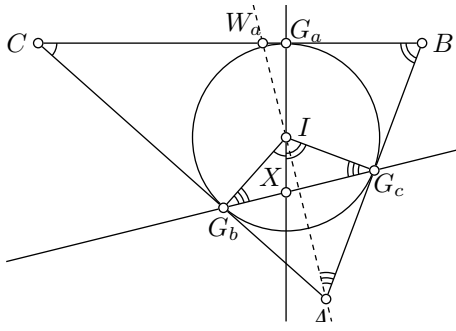
6. Lemma. Im Dreieck ABC schneiden sich die Geraden G_bG_c , IG_a und die Schwerlinie s_a in einem Punkt. Ebenso die entsprechenden Geraden bezüglich den Ecken B, C .

Beweis. Wir zeigen, dass die Gerade IG_a und die Schwerlinie s_a die Strecke G_bG_c im gleichen Verhältnis teilen. Mit $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ bezeichnen wir die Seitenlängen des Dreiecks ABC .

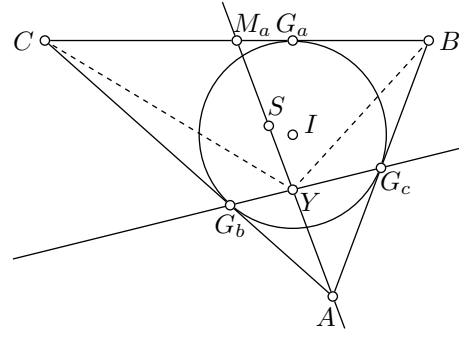


Figur 4

Sei X der Schnittpunkt der Geraden IG_a und G_bG_c (Figur 5). Der Winkel $\angle XIG_c$ ist als Aussenwinkel des Kreisvierecks IG_cBG_a gleich $\beta = \angle CBA$. Ebenso ist $\angle G_bIX = \gamma = \angle ACB$. Das Kreisviereck AG_cIG_b wird durch die Diagonale G_bG_c in zwei gleichschenklige Dreiecke geteilt. Demnach sind die Basiswinkel im Dreieck G_cIG_b gleich $\frac{\alpha}{2}$, wobei α der Dreieckswinkel bei A ist.



Figur 5



Figur 6

W_a sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden AI mit der Seite BC . Die Dreiecke G_cIX , ABW_a und G_bIX , ACW_a sind je zwei ähnliche Dreiecke. Damit erhalten wir mit $r = IG_b = IG_c$ und $w = AW_a$ die Proportionen

$$G_cX : r = w : c, \quad G_bX : r = w : b$$

Diese Gleichungen liefern $w = \frac{c \cdot G_cX}{r} = \frac{b \cdot G_bX}{r}$, und somit $G_bX : G_cX = c : b$.

Sei Y der Schnittpunkt der Schwerlinie s_a mit der Geraden G_bG_c , und M_a die Seitenmitte von BC (Figur 6). Bekanntlich teilt eine Ecktransversale die gegenüberliegende Seite und den Dreiecksinhalt im gleichen Verhältnis. Die Schwerlinie halbiert den Inhalt. Daher sind die Dreiecke CYM_a und BYM_a inhaltsgleich, und somit auch die beiden Dreiecke AYC und AYB . Es bezeichne J_{UVW} den Inhalt eines Dreiecks UVW . Nun ist wegen $AG_b = AG_c = s - a$

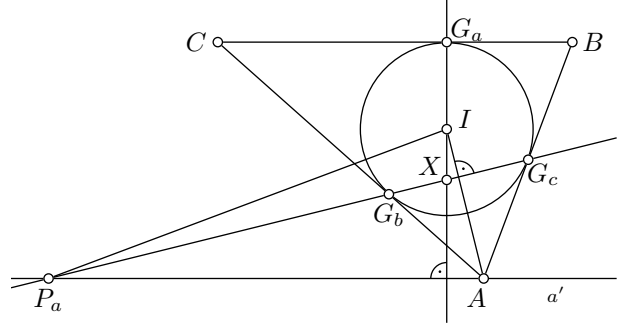
$$J_{AYC} : J_{AYG_b} = AC : AG_b = b : (s - a), \quad J_{AYB} : J_{AYG_c} = AB : AG_c = c : (s - a)$$

Damit erhalten wir schliesslich $G_bY : G_cY = J_{AYG_b} : J_{AYG_c} = c : b$.

Folglich ist X mit Y identisch, d.h. die drei Geraden schneiden sich in einem Punkt. □

7. Beweis von Satz 5. Sei a' die Parallele zur Seite BC durch A . P_a sei der Pol von t_a bezüglich des Kreises k_a so wie in Abschnitt 1 beschrieben. Vom Beweis im Abschnitt 3 wissen wir, dass P_a der Schnittpunkt von G_bG_c mit a' ist.

Sei X der Schnittpunkt der Gerade IG_a mit der Gerade G_bG_c . Betrachte das Dreieck AIP_a . Die Gerade P_aG_c steht senkrecht auf der Seite AI , und IG_a steht senkrecht auf der Seite P_aA . X ist demnach der Höhenschnittpunkt im Dreieck AIP_a . Nach Lemma 6 ist AX die Schwerlinie s_a . Sie verläuft also senkrecht zur Geraden IP_a .



Figur 7

Weil A der Pol der Gerade G_bG_c (bzgl des Inkreises) ist, geht die Polare von P_a durch A . Diese Polare ist orthogonal zu IP_a , mithin die Schwerlinie s_a . Der Schwerpunkt S liegt also auf der Polaren von P_a . Dies bedeutet, dass die Polare von S durch P_a geht. Diese Eigenschaft gilt ebenso für die anderen Punkte P_b, P_c . Folglich ist die Polare von S die Drei-Pole-Gerade. □

8. Bemerkungen.

(a) Die Kollinearität der Pole P_a, P_b, P_c ergibt sich unabhängig von Satz 1. Es genügen die Überlegungen im Beweis von Satz 5 alleine: weil die drei Polaren von P_a, P_b, P_c sich im Schwerpunkt S schneiden, muss die Polare von S durch diese drei Punkte verlaufen.

(b) Analoge Situationen ergeben sich, wenn bei den drei berührenden Kreise zwei davon, k_b, k_c , innerhalb des dritten k_a liegen. Sind A, B, C die Zentren dieser Kreise, so ist die Drei-Pole-Gerade der Pol des Schwerpunktes bezüglich des der Ecke A gegenüberliegenden Ankreises. Der Ankreis übernimmt die Rolle des Inkreises. Die Berührungspunkte des Ankreises übernehmen die Rolle der Inkreisberührungspunkte G_a, G_b, G_c .