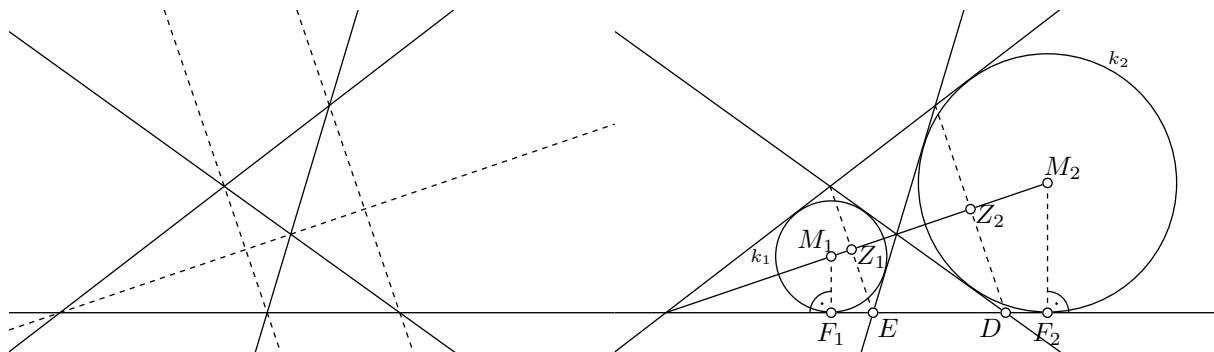


# EIN SATZ ÜBER DRACHENVIERSEITE

Roland Stärk, 2007

Publiziert auf [www.geometria.ch](http://www.geometria.ch)

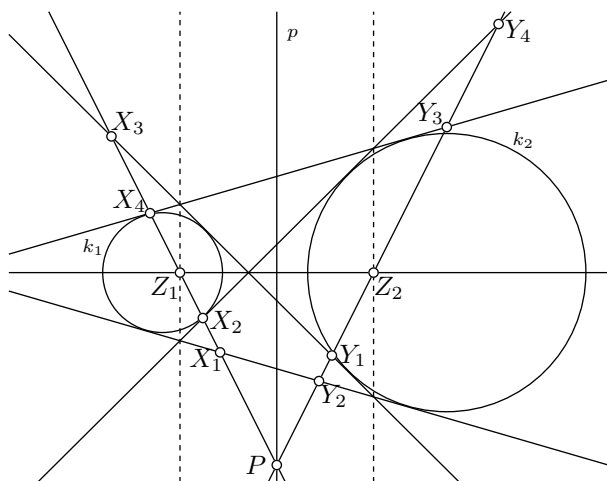
Ein Drachenvierseit ist ein Vierseit, das symmetrisch ist bezüglich einer seiner Diagonalen (Fig.1). Die beiden andern Diagonalen, die Nebendiagonalen, stehen senkrecht auf der Symmetriediagonalen. Ein Drachenvierseit besitzt zwei alle Seiten berührende Kreise: einen In- und einen Ankreis.



Bekanntlich bilden alle Orthogonalkreise eines Kreispaares  $k_1, k_2$  ein Büschel. Wenn  $k_1$  und  $k_2$  sich nicht schneiden, laufen ihre Orthogonalkreise durch zwei feste Punkte auf der Verbindung der Mittelpunkte von  $k_1$  und  $k_2$ . Hier soll zuerst gezeigt werden, dass bei einem Drachenvierseit gerade die Schnittpunkte  $Z_1$  und  $Z_2$  der Nebendiagonalen mit der Symmetriediagonalen die Orthogonalkreisbüschelpunkte des In/Ankreispaares sind (Fig.2).

Es genügt, für irgend einen der Orthogonalkreise nachzuweisen, dass er die Punkte  $Z_1$  und  $Z_2$  enthält. Es seien  $F_1, F_2$  die Fusspunkte der Lote von den Kreismittelpunkten  $M_1, M_2$  auf eine der Seiten des Vierseits, und  $E$  und  $D$  seien die Schnittpunkte der beiden Nebendiagonalen mit dieser. Wir betrachten den Thaleskreis über der Strecke  $F_1F_2$ . Mit Hilfe der Kreisvierecke  $F_1EZ_1M_1$  und  $F_2M_2Z_1E$  lässt sich sofort zeigen, dass der Winkel  $F_1Z_1F_2$ , als Summe der Winkel  $F_1Z_1E$  und  $EZ_1F_2$ , ein rechter ist. Ebenso der Winkel  $F_1Z_2F_2$ .

Weiter mit Fig.3.

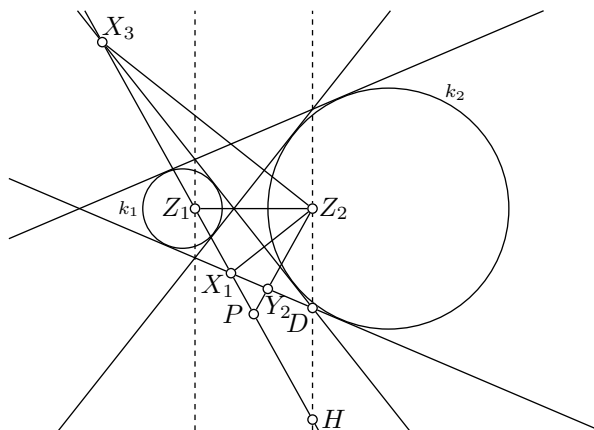


**Satz:**

Es seien  $Z_1$  und  $Z_2$  die Diagonalschnittpunkte eines Drachenvierseits, und  $p$  sei die Mittelsenkrechte von  $Z_1Z_2$ . Ein beliebiger Punkt  $P$  auf  $p$  wird mit  $Z_1$  und  $Z_2$  verbunden. Die Schnittpunkte der Geraden  $PZ_1$  und  $PZ_2$  mit den Seiten des Vierseits werden mit  $X_1, X_2, X_3, X_4$  und  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  bezeichnet, wobei die Numerierung sich nach der Reihenfolge der Seiten rund um den zugehörigen In/Ankreis - irgendwo beginnend - richtet. Für die von  $P$  ausgehenden Strecken gilt dann:

$$PX_1 \cdot PX_3 = PX_2 \cdot PX_4 = PY_1 \cdot PY_3 = PY_2 \cdot PY_4 = PZ^2$$

Den Beweis liefert der folgende Ausschnitt (Fig.4):



Es genügt, das Produkt  $PX_1 \cdot PX_3$  zu untersuchen.  $D$  sei die Vierseitecke, bei der die Seiten zusammenlaufen, welche  $X_1$  und  $X_3$  enthalten, und  $H$  sei der Schnittpunkt der Geraden  $PZ_1$  mit der Nebendiagonalen durch  $D$ . Die Projektion der vier Punkte  $X_1, X_3, Z_1$  und  $H$  von  $D$  aus auf die andere Nebendiagonale zeigt, dass das Doppelverhältnis  $X_1X_3Z_1H$  gleich  $-1$  ist. Da der Winkel  $Z_1Z_2H$  ein rechter ist, folgt, dass der Winkel  $X_3Z_2Z_1$  gleich dem Winkel  $Z_1Z_2X_1$  ist. Und daraus folgt, unter Ausnützung der Gleichschenkligkeit des Dreiecks  $Z_1PZ_2$ , die Ähnlichkeit der Dreiecke  $PX_1Z_2$  und  $PZ_2X_3$ . Somit gilt  $PX_1 : PZ_2 = PZ_2 : PX_3$ , also  $PX_1 \cdot PX_3 = PZ_2^2$ .

Nun denke man sich in der Fig. 3 noch den Kreis  $z$  eingezeichnet, der den Mittelpunkt  $P$  hat und durch  $Z_1$  und  $Z_2$  geht. Bei der Inversion an  $z$  gehen die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  in sich über ( $z$  ist ja ein Orthogonalkreis), und die Seiten des Vierseits gehen in Kreise durch  $P$  über, welche  $k_1$  und  $k_2$  berühren. Nach unserem Satz geht z.B.  $X_1$  in  $X_3$  und  $Y_2$  in  $Y_4$  über, die Gerade  $X_1Y_2$  also in den Umkreis des Dreiecks  $PX_3Y_4$ .

Noch eine kurze Zwischenbetrachtung: Bei einem Dreieck  $ABC$  schneidet der Kreis durch  $A$  und  $B$ , dessen Mittelpunkt  $P$  den der Ecke  $C$  gegenüberliegenden Umkreisbogen halbiert, die Winkelhalbierende  $CP$  im Inkreismittelpunkt, wie eine kurze Winkelberechnung sofort zeigt.

The diagram illustrates the construction of the center of mass \$M\_1\$ for two overlapping circles \$k\_1\$ and \$k\_2\$. It features several key points and lines:

- Circles:** Two circles, \$k\_1\$ and \$k\_2\$, are shown. Circle \$k\_1\$ is centered at \$Z\_1\$ and circle \$k\_2\$ is centered at \$Z\_2\$.
- Points:** Points \$A, B, C, D, P, X\_1, X\_2, Y\_1, Y\_2, Z\_1, Z\_2, M\_1, M\_2, u, v, w, x, y, z\$ are labeled. \$X\_3 \equiv C\$ is also indicated.
- Lines:** Lines connect various points, showing the intersection of medians at the center of mass \$M\_1\$.

Damit ist der Thébaultsche Satz (Victor Thébault 1882-1960) hier wieder einmal bewiesen - auf elementarste Weise, wie wir meinen -, der da lautet: Bei einem Dreieck  $ABC$ , mit einem Punkt  $D$  auf der Seite  $AB$ , liegt der Inkreismittelpunkt auf der Geraden durch die Mittelpunkte der beiden Füllkreise, welche  $AB$ ,  $CD$  und den Umkreis berühren.

Dr. Roland Stärk, Im Santenbühl 3, CH-8234 Stetten roland.staerk[at]freesurf.ch